

Polinomios de Tutte en Probabilidad no Conmutativa

Tesis para obtener el título de Licenciado en
Matemáticas

Presenta

Ramón Iván García Álvarez

Co-directores de tesis

Dr. Octavio Arizmendi Echegaray

Dr. Pierre Tarrago

UNIVERSIDAD DE
GUANAJUATO



DIVISIÓN DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Guanajuato, Guanajuato, Agosto, 2018

*A mis padres, Iriana y José Antonio,
gracias por creer en mí y apoyarme incondicionalmente.*

Agradecimientos

Agradezco principalmente a mis padres y mis hermanas Yissel y Andrea, por ser parte fundamental en mi educación.

Agradezco al Dr. Octavio Arizmendi, por su guía y consejos a lo largo de la carrera, por su apoyo y paciencia como coasesor.

Al Dr. Pierre Tarrago por su paciencia y dedicación como coasesor.

A mis amigos y especialmente a mi novia, Carolina, por estar a mi lado en los momentos más difíciles, así como en los más felices, a lo largo de estos años.

A la Universidad de Guanajuato y al CIMAT por las becas y apoyos que me otorgaron a lo largo de la licenciatura. Agradezco principalmente a los profesores en ambas instituciones por su gran compromiso con mi formación como matemático y como persona.

Índice general

| | |
|--|-----------|
| 1. Introducción a Probabilidad no Conmutativa | 3 |
| 1.1. Espacios de probabilidad no conmutativa | 3 |
| 1.2. Nociones de independencia | 10 |
| 2. Cumulantes | 14 |
| 2.1. Conjuntos parcialmente ordenados | 14 |
| 2.2. Particiones | 22 |
| 2.3. Funciones generadoras | 31 |
| 2.4. Definiciones de Cumulantes | 34 |
| 3. Polinomios en gráficas | 46 |
| 3.1. Polinomio cromático | 47 |
| 3.2. Matroides | 51 |
| 3.3. Polinomio de Tutte | 60 |
| 4. Relaciones entre cumulantes | 67 |
| 4.1. Operadores cerradura | 67 |
| 4.2. Relaciones obtenidas utilizando funciones generadoras | 74 |
| 4.3. Relaciones obtenidas utilizando el polinomio de Tutte | 80 |
| 5. Sobre la fórmula de cumulantes clásicos a cumulantes monótonos | 83 |
| 5.1. Resultados previos | 83 |
| 5.2. Nuevos resultados | 86 |
| Conclusiones | 96 |
| Apéndice | 97 |

Introducción

En esta tesis estudiamos aspectos combinatorios de probabilidad no conmutativa con el fin de avanzar en el problema de encontrar una fórmula entre cumulantes clásicos y cumulantes monótonos. Para hacer esto revisamos la literatura relevante sobre el tema y presentamos dos nuevos teoremas en el Capítulo 5. El Teorema 5.14 nos ofrece como corolario una propiedad recursiva de los coeficientes en la fórmula cumulantes monótonos a clásicos. El Teorema 5.17 nos muestra una propiedad recursiva que cumple uno de los polinomios asociados a los coeficientes en la fórmula cumulantes monótonos a clásicos.

La probabilidad no conmutativa es un área reciente, con aplicaciones principalmente en matrices aleatorias, teoría de gráficas, teoría de representaciones y probabilidad en general. Al considerar la esperanza como un funcional lineal y tomar las variables aleatorias como elementos de un álgebra, podemos extender nuestro entendimiento de algunos fenómenos aleatorios. En esta tesis nos interesan principalmente las propiedades combinatorias de los espacios de probabilidad no conmutativa, por lo que no se incluirán aplicaciones importantes como son el Teorema del Límite Central Libre o la relación con los teoremas de Wigner y Marchenko-Pastur.

Existen varios tipos de cumulantes. Los cumulantes son polinomios en términos de los momentos de variables aleatorias no conmutativas, que siguen reglas específicas para su cálculo de acuerdo al tipo de independencia a la que están asociados. En ocasiones nos será más sencillo estudiar los cumulantes de una variable aleatoria no conmutativa, que los momentos en sí.

En probabilidad libre también podemos estudiar fenómenos como son la determinación por momentos. Como es posible despejar los momentos a partir de los cumulantes, si una variable aleatoria no conmutativa está determinada por sus momentos, entonces también está determinada por sus cumulantes.

El polinomio de Tutte es una herramienta general que se descubrió en un principio para gráficas. Sus aplicaciones pueden ser muy variadas, ya que generalizan toda una familia de funciones sobre las gráficas, funciones

conocidas como invariantes cromáticos.

Posteriormente se descubrió que se puede definir el polinomio de Tutte para una estructura aún más rica, las matroides. Las matroides generalizan algunas de las propiedades de espacios vectoriales de dimensión finita, así como la estructura de gráficas a partir de sus árboles generadores.

Utilizaremos propiedades del polinomio de Tutte en algunas de nuestras fórmulas para relaciones entre cumulantes.

En el capítulo 1 definiremos lo que es un espacio de probabilidad no conmutativa, algunas definiciones básicas y las nociones de independencia en dichos espacios.

En el capítulo 2 vamos a definir los cumulantes clásicos, booleanos, libres y monótonos. Para poder definirlos, estudiaremos aspectos de combinatoria utilizados en probabilidad no conmutativa. Definiremos la estructura de conjuntos parcialmente ordenados y su álgebra de incidencia, incluyendo las particiones. Elaboraremos en algunas funciones generadoras, las cuales nos servirán como herramienta en capítulos posteriores. Para finalizar el capítulo definiremos los cumulantes, veremos como se relacionan los cumulantes con sus respectivos tipos de independencia y sus propiedades como series asociadas a funciones generadoras. Nos es de particular interés la estructura combinatoria de los cumulantes.

En el capítulo 3 nos interesa definir el polinomio de Tutte. Para definirlo primero estudiaremos una de sus evaluaciones más conocidas, el polinomio cromático. Definiremos las matroides para poder definir el polinomio de Tutte en matroides. Finalmente veremos un resultado que es útil a la hora de probar que una función del conjunto de gráficas a un campo es la evaluación del polinomio de Tutte.

En el capítulo 4 estudiaremos algunas de las fórmulas entre cumulantes que ya se conocen, para darnos una idea de las herramientas que podrían ser útiles para nuestro problema de interés.

En el capítulo 5 se muestran los avances que se tenían en el cálculo de la fórmula entre cumulantes clásicos y monótonos.

En la Sección 2 del Capítulo 5 se presentan nuevos resultados en la fórmula entre cumulantes clásicos y monótonos. Se definen dos nuevos posibles polinomios para asociar a particiones, con la expectativa de que cumplan propiedades de recurrencia con las operaciones de contracción y borrado. Se presentan dos nuevos teoremas obtenidos a partir de tales definiciones.

Capítulo 1

Introducción a Probabilidad no Conmutativa

En este capítulo introduciremos el marco teórico básico de la tesis que es el de un espacio de probabilidad no conmutativo. La idea general es reemplazar el álgebra conmutativa de variables aleatorias por una algebra más general y la esperanza por cualquier funcional lineal positiva. Esto permitirá asociar distribuciones a los elementos de un álgebra y hacer probabilidad. Vamos a introducir las definiciones de distribución, momentos, cumulantes y medida asociada para variables aleatorias en espacios de probabilidad no conmutativos. Se verán ejemplos básicos para las definiciones presentadas.

Este capítulo está basado en las definiciones y ejemplos presentados en el primer capítulo de [1].

1.1. Espacios de probabilidad no conmutativa

Comenzaremos por definir los espacios en los que se desea trabajar: espacios de probabilidad no conmutativos.

Definición 1.1. Un espacio de probabilidad no conmutativo (o un EPNC) es un par (\mathcal{A}, ϕ) de modo que \mathcal{A} es un álgebra unitaria sobre \mathbb{C} y ϕ es una función lineal de \mathcal{A} a \mathbb{C} y tal que $\phi(1_{\mathcal{A}}) = 1$.

- Si además se cumple $\phi(ab) = \phi(ba)$ para todo par a, b entonces decimos que el espacio es tracial.
- Si \mathcal{A} es un álgebra sobre \mathbb{C} con un operador $*$ antilineal de \mathcal{A} en \mathcal{A} que cumple $(a^*)^* = a$ y $(ab)^* = b^*a^*$ (esto es, una $*$ -álgebra) y se cumple

$\phi(aa^*) \geq 0$ (decimos que el funcional es positivo) para todo a , entonces (\mathcal{A}, ϕ) es llamado $*$ -espacio de probabilidad.

- Los elementos $a \in \mathcal{A}$ son llamados variables aleatorias no conmutativas en \mathcal{A} .
- Si $aa^* = a^*a$ decimos que a es normal. Y si $a = a^*$ decimos que es autoadjunto.

La idea es que la información que antes obteníamos a través de la medida de probabilidad \mathbb{P} en la terna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, de un espacio de probabilidad clásico ahora es obtenida a través de la funcional lineal ϕ . Para ésto definimos los momentos de una variable aleatoria $a \in \mathcal{A}$.

Definición 1.2. Dado un $*$ -espacio de probabilidad y una variable aleatoria $x \in \mathcal{A}$. Definimos los $*$ -momentos de nuestra variable aleatoria no conmutativa como el conjunto

$$\{\phi(x^{a_1} \cdots x^{a_n}) | n \in \mathbb{N}, a_i \in \{1, *\}\}.$$

Cuando x es normal y bajo restricciones naturales para el algebra \mathcal{A} (ser un algebra de operadores) se puede asociar una medida de probabilidad única μ_x . De modo que

$$\phi(x^n (x^*)^m) = \int_{\mathbb{C}} z^n \bar{z}^m \mu_x(dz).$$

Cuando dicha medida existe y es única, se le conoce como la $*$ -distribución analítica de x .

Cuando x es autoadjunto, calcular sus momentos se reduce a calcular $\phi(x^k)$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

Como ejemplo natural consideremos en probabilidad clásica al conjunto de variables aleatorias, que son funciones medibles entre un espacio y los reales. La esperanza de una variable aleatoria X , se define como

$$E(X) = \int_{\Omega} x \mu(dx),$$

siempre que el primer momento absoluto $\int |x| d(\mu(x))$ sea finito. La esperanza es un funcional lineal positivo y por lo tanto podríamos enmarcar al conjunto de variables aleatorias dentro de la Definición 1.1. Sin embargo tenemos dos problemas. Primero, la integral $\int |x| \mu(dx)$ puede divergir y segundo, cuando queremos asociar una medida a X a través de sus momentos,

$$M_n(X) := E(X^n) = \int_{\Omega} x^n \mu(dx),$$

tenemos que asegurar que estos caracterizan a nuestra variable aleatoria. En el caso general esto no pasa, es posible que dos variables aleatorias distintas tengan los mismos momentos.

Sin embargo, en el caso de variables aleatorias con soporte compacto, es cierto que los momentos existen y determinan a una variable aleatoria.

Ejemplo 1.3. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad en el sentido clásico. Esto es Ω es un conjunto, \mathcal{F} es una σ -álgebra sobre Ω y \mathbb{P} es una medida $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ con $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. Sea $\mathcal{A} = L^\infty(\Omega, \mathbb{P})$, esto es, el conjunto de variables aleatorias en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ con soporte compacto. Esto quiere decir que las variables aleatorias que consideramos tienen todos sus momentos finitos. De este modo, para $a \in \mathcal{A}$ tomamos

$$\phi(a) := \mathbb{E}(a) = \int_{\Omega} a(\omega) d\mathbb{P}(\omega).$$

Como las integrales abren sumas de funciones, sacan escalares en \mathbb{C} y $\int 1 d\mathbb{P}(\omega) = 1$, entonces $(L^\infty(\Omega, \mathbb{P}), E)$ es un espacio de probabilidad no conmutativo.

Un lector probabilista podría agumentar que tomar a $L^\infty(\Omega, \mathbb{P})$ podría ser muy restringido pues la distribución normal estándar $N(0, 1)$ dada por la densidad

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

no se encuentra en nuestro espacio y es una distribución fundamental pues aparece en el Teorema de Límite Central.

Para solucionar este problema se pueden considerar álgebras más grandes, como $L^\infty(\Omega, \mathbb{P})$, que son las variables aleatorias con todos sus momentos finitos. Sin embargo, algo que no estudiaremos en esta tesis son las variables aleatorias que no tienen todos sus momentos finitos.

Vamos a definir una estructura general que nos permitirá definir y trabajar EPNC's de manera más unificada.

Ejemplo 1.4. Consideremos como \mathcal{A} a $B(\mathcal{H})$ el conjunto de operadores lineales acotados de \mathcal{H} . Ésto es una $*$ -álgebra donde, para $a \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, a^* está determinado por la relación:

$$\langle a(\zeta), \nu \rangle = \langle \zeta, a^*(\nu) \rangle, \forall \zeta, \nu \in \mathcal{H}.$$

Si fijamos $\nu \in \mathcal{H}$ con $\|\nu\| = 1$, obtenemos nuestro funcional lineal $\phi(a) := \langle a\nu, \nu \rangle$. La linealidad de ϕ se obtiene de la linealidad del producto interno. Se

cumple $\langle 1_{\mathcal{A}}(\nu), \nu \rangle = \langle \nu, \nu \rangle = 1$. Y como $\phi(aa^*) = \langle aa^*(\nu), \nu \rangle = \langle a^*(\nu), a^*(\nu) \rangle$ tenemos que ϕ es positivo y por lo tanto nuestro ejemplo es un *-espacio de probabilidad.

Ejemplo 1.5. Sea (\mathcal{A}, ϕ) nuestro espacio de probabilidad como en el Ejemplo 1.4, con nuestro espacio de Hilbert de dimensión numerable y base ortogonal $\{\dots, e_{-1}, e_0, e_1, \dots\}$. Tomamos $\phi(a) = \langle a(e_0), e_0 \rangle$. Sea u el operador lineal tal que $u(e_k) = e_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. De modo que $u^*(e_{k+1}) = e_k$. La distribución de u es tal que, dados $x_1, \dots, x_n \in \{1, *\}$

$$\phi(u^{x_1} \dots u^{x_n}) = \begin{cases} 1, & \text{si hay tantos 1's como *'s,} \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

En particular,

$$\phi(u^k) = \delta_{k,0}.$$

Sea $a = u + u^*$. Como $a^* = a$, la distribución de a sólo depende de $\phi(a^n)$, que está dada por

$$\phi(a^n) = \phi((u + u^*)^n) = \begin{cases} 0, & \text{si } n=2m-1 \text{ para algún } m \in \mathbb{N} \\ \binom{2m}{m}, & \text{si } n=2m \text{ para algún } m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Vamos a probar que

$$\phi(a^n) = \int_{-2}^2 \frac{x^n}{\pi \sqrt{4-x^2}} dx.$$

Como $\frac{x^n}{\pi \sqrt{4-x^2}}$ es impar para n impar, entonces es cierto que la integral es 0 en dicho caso y por lo tanto coincide con $\phi(a^n)$.

Para n par utilizaremos un cambio de variable e integraremos por partes. Tomemos $t = \frac{x}{2}$ por lo que $dx = 2dt$ así que

$$\int_{-2}^2 \frac{x^{2m}}{\pi \sqrt{4-x^2}} dx = \int_{-1}^1 \frac{2^{2m} t^{2m}}{2\pi \sqrt{1-t^2}} 2dt = 2^{2m} \int_{-1}^1 \frac{t^{2m}}{\pi \sqrt{1-t^2}} dt.$$

Luego tomamos $t = \text{sen}(\theta)$ por lo que $dt = \text{cos}(\theta)d\theta$.

$$2^{2m} \int_{-1}^1 \frac{t^{2m}}{\pi \sqrt{1-t^2}} dt = 2^{2m} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen}(\theta)^{2m}}{\pi \text{cos}(\theta)} \text{cos}(\theta) d\theta = \frac{2^{2m}}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}(\theta)^{2m} d\theta.$$

Notemos que, si tomamos $du = \text{sen}(x)$ y $v = \text{sen}(x)^{2m-1}$ entonces

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}(\theta)^{2m} d\theta = [-\text{cos}(x) \text{sen}(x)^{2m-1}]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - (2m-1) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\text{cos}(\theta) \text{sen}(\theta)^{2m-2} \text{cos}(\theta) d\theta$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}(\theta)^{2m} d\theta = (2m-1) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \text{sen}(\theta)^2) \text{sen}(\theta)^{2m-2} d\theta.$$

Por lo que

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}(\theta)^{2m} d\theta = \frac{2m-1}{2m} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}(\theta)^{2m-2} d\theta = \frac{2m(2m-1)}{2^2 m} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}(\theta)^{2m-2} d\theta.$$

Como

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}(\theta)^2 d\theta = \frac{2}{2 * 1 * 1} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 d\theta = \pi,$$

podemos probar inductivamente que

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}(\theta)^{2m} d\theta = \frac{\binom{2m}{m}}{2^{2m}} \pi.$$

Concluimos

$$\int_{-2}^2 \frac{x^{2m}}{\pi \sqrt{4-x^2}} dx = \binom{2m}{m} = \phi(a^{2m}).$$

Por lo que $\mu_a(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{4-x^2}}$.

Definición 1.6. Un morfismo Φ entre los $*$ -espacios de probabilidad (\mathcal{A}_1, ϕ_1) y (\mathcal{A}_2, ϕ_2) es un morfismo unitario de álgebras entre \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 que además cumple $\phi_2 \circ \Phi = \phi_1$

Definición 1.7. Dado un $*$ -espacio de probabilidad (\mathcal{A}, ϕ) , definimos una representación de nuestro espacio como un morfismo de nuestro espacio a uno como en la Definición 1.4. Esto quiere decir, una representación de (\mathcal{A}, ϕ) es una terna (\mathcal{H}, Φ, ν) con \mathcal{H} espacio de hilbert, ν unitario y Φ un morfismo de EPNCs entre \mathcal{A} y $B(\mathcal{H})$. Por lo que $\phi(a) = \langle \Phi(a)\nu, \nu \rangle$

Típicamente cuando pensamos en variables aleatorias no conmutativas pensamos en operadores lineales acotados sobre un espacio de Hilbert, la razón de ésto es que la mayoría de los casos aceptan una representación.

Ejemplo 1.8. Sea $\mathcal{A} = \mathcal{M}^{n \times n}(\mathbb{C})$. Consideremos $\phi(M) = M_{1,1}$. Como la linealidad de \mathcal{A} se extiende a sus entradas, tenemos que ϕ es lineal, se cumple también $\phi(Id) = 1$. Por lo tanto (\mathcal{A}, ϕ) es un EPNC. Además hay un operador $*$ estándar en \mathcal{A} , y se cumple

$$\phi(MM^*) = \sum_{j=1}^n M_{1,j} \bar{M}_{1,j} \geq 0,$$

por lo que ϕ es positiva y entonces (\mathcal{A}, ϕ) es un $*$ -espacio de probabilidad.

Como \mathbb{C}^n ya es un espacio de Hilbert y $\mathcal{M}^{n \times n}(\mathbb{C}) = B(\mathcal{C})$ tenemos que una representación de (\mathcal{A}, ϕ) se obtiene tomando a Φ como la identidad y a $\nu = e_1$. Se cumple que $\phi(M) = M_{1,1} = \langle Me_1, e_1 \rangle$.

Un ejemplo importante que conecta la probabilidad clásica con teoría de operadores es el de matrices aleatorias. Es posible y factible utilizar herramientas puramente probabilistas para estudiar estas matrices pero el marco de probabilidad no conmutativa brinda otra perspectiva pues al menos a gran escala las matrices aleatorias tienen un fenómeno de concentración y por lo tanto tienen propiedades muy similares a operadores de dimensión infinita.

Ejemplo 1.9. Podemos considerar como nuestra álgebra las matrices $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ y como nuestro operador ϕ a la traza normalizada $\frac{1}{n}Tr$. Es lineal pues la traza es lineal y $\phi(1_{\mathcal{A}}) = 1$ por la normalización. Por lo que tenemos un EPNC. Tomando al operador $*$ como $M^* = (\bar{M})^T$ tenemos que

$$\phi(MM^*) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \sum_{j=1}^n M_{m,j} \bar{M}_{m,j} \geq 0,$$

Por lo que tenemos un $*$ -espacio de probabilidad.

Tomemos a $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$. Notemos que $B(\mathcal{H}) = \mathcal{M}^{n \times n}(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{M}^{n \times n}(\mathbb{C})$. Tomemos a Φ como $\Phi(M) = Id_n \otimes M$.

Como $\Phi(Id_n) = Id_n \otimes Id_n = Id_{n \times n}$ y

$$\phi(M_1 M_2) = Id_n \otimes M_1 M_2 = (Id_n \otimes M_1)(Id_n \otimes M_2) = \Phi(M_1)\Phi(M_2)$$

tenemos que Φ es un morfismo de EPNC's.

Sea $(e_j \otimes e_i)_{i,j \in [n]}$ una base ortogonal de \mathcal{H} . Vamos a tomar a $\nu := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n e_j \otimes e_j$. Se tiene $\|\nu\| = 1$. Luego

$$\begin{aligned} \langle (Id_n \otimes M)(\nu), \nu \rangle &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n (Id \otimes M)(e_j \otimes e_j), \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n e_i \otimes e_i \right\rangle \\ &= \frac{1}{n} \left\langle \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n M_{j,k} (e_j \otimes e_k), \sum_{i=1}^n e_i \otimes e_i \right\rangle \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n M_{j,j}, \end{aligned}$$

por lo que $\frac{1}{n}Tr(M) = \langle (Id_n \otimes M)\nu, \nu \rangle$. Obtenemos que (\mathcal{H}, Φ, ν) es una representación de (\mathcal{A}, ϕ) .

Observemos por último que si $X \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$, con X autoadjunto y con eigenvalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Los eigenvalores de X^k serán $\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$ y por lo tanto

$$\phi(X^k) = \frac{1}{k}(\lambda_1^k + \dots + \lambda_n^k)$$

Podemos tomar la medida de probabilidad $\mu_X = \frac{1}{n}(\delta_{\lambda_1} + \dots + \delta_{\lambda_n})$ en los complejos que cumple $\mu(\{\lambda_i\}) = 1/n$ para cada i y $\mu(\mathbb{C} \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}) = 0$. Se satisface la relación

$$\phi(X^k) = \frac{1}{n}(\lambda_1^k + \dots + \lambda_n^k) = \int_{\mathbb{C}} x^k d\mu$$

Ejemplo 1.10. Podemos tomar el producto tensorial de nuestro ejemplo $(\mathcal{M}^{n \times n}(\mathbb{C}), \frac{1}{n})$ y nuestro ejemplo de variables aleatorias $L^\infty(\Omega, \mathbb{E})$. De modo que obtenemos el EPNC cuya álgebra es isomorfa a $\mathcal{M}^{n \times n}(L^\infty(\Omega, \mathbb{P}))$ y cuyo funcional lineal es $\mathbb{E}(\frac{1}{n}tr)$. Es decir, nuestra álgebra son las matrices con variables aleatorias de soporte compacto como entradas y nuestro funcional es la esperanza de la traza normalizada. Esto es un EPNC pues la linealidad se extiende en productos tensoriales y el funcional sigue siendo 1 en la identidad.

Ejemplo 1.11. Sea G un grupo y $\mathbb{C}\langle G \rangle$ su álgebra de grupo. Este objeto es un espacio vectorial cuyos generadores son los elementos de G y cada elemento $a \in \mathbb{C}\langle G \rangle$ puede escribirse de manera única como

$$a = \sum_{g \in G} c_g g$$

con cada $c_g \in \mathbb{C}$ y de modo que $c_g \neq 0$ sólo para una cantidad finita de g 's.

Para calcular el producto en $\mathbb{C}\langle G \rangle$ se extiende el producto regular en G , de modo que

$$\left(\sum_{g \in G} c_g g\right) \left(\sum_{h \in G} b_h h\right) = \sum_{r \in G} \left(\sum_{g, h \in G, gh=r} c_g b_h\right) r$$

Ya que tenemos nuestra álgebra vamos a definir nuestro funcional lineal

$$\phi\left(\sum_{g \in G} c_g g\right) := c_e$$

En el caso en que $g \in G$ es de orden k en G . Observemos que $\phi(g^m) = 0$ siempre que k no divida a m y $\phi(g^m) = 1$ siempre que m sea divisible entre k . Se puede verificar que

$$\phi(g^m) = \int_{\mathbb{C}} x^m d\mu,$$

donde μ es la medida que asigna peso $1/k$ a cada raíz compleja de la ecuación $x^k = 1$ y 0 al resto de \mathbb{C} . Estos es $\mu = \frac{1}{k} \sum_{n=0}^{k-1} \delta_{e^{\frac{2\pi i n}{k}}}$

1.2. Nociones de independencia

En el estudio clásico de probabilidad existe una noción llamada independencia. La independencia suele escribirse en términos de probabilidades de eventos. En el marco de probabilidad no conmutativa conocemos a la independencia en el sentido probabilista como noción de independencia clásica o tensorial.

En este marco preferimos estudiar las propiedades de la esperanza como funcional lineal. Se sabe que si tenemos una familia de variables aleatorias independientes en el sentido clásico (x_1, \dots, x_n) entonces

$$\mathbb{E}(x_1^{n_1} \dots x_m^{n_m}) = \mathbb{E}(x_1^{n_1}) \dots \mathbb{E}(x_m^{n_m}),$$

donde m es un entero positivo y cada exponente es un número natural. Podemos abstraer esta propiedad de \mathbb{E} para nuestros EPNCs.

Definición 1.12 (Independencia clásica). Si tenemos un Espacio de Probabilidad no Conmutativa (\mathcal{A}, ϕ) , decimos que $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ subálgebras de \mathcal{A} son independientes en el sentido tensorial o clásico si conmutan entre sí y:

$$\phi(a_1 \dots a_m) = \phi(a_1) \dots \phi(a_m),$$

Cuando cada a_i pertenece en una distinta álgebra A_λ .

Ejemplo 1.13. Tomemos como nuestro EPNC al álgebra de grupo del Ejemplo 1.11. Sea $G = G_1 \times G_2$, sea $a = (x, e_2)$ y $b = (e_1, y)$, donde e_1 y e_2 son las respectivas identidades en G_1 y G_2 . Nos interesa estudiar los momentos mixtos de a y b . Como a y b conmutan en realidad sólo nos hace falta estudiar $\phi(a^n b^m)$ para m, n naturales. Pero como $a^n b^m = (x^n, y^m)$ tenemos que $\phi(a^n, b^m) = \phi(a^n) \phi(b^m)$. Por lo que $\langle a, 1 \rangle$ y $\langle b, 1 \rangle$ son independientes en el sentido clásico o tensorial.

Ahora que trabajamos en espacios de probabilidad no conmutativa, la noción de independencia clásica se encuentra en términos de ϕ . Podemos preguntarnos entonces qué otras relaciones entre los momentos de nuestras álgebras nos ofrecen una estructura similar a la independencia clásica.

Definición 1.14 (Independencia libre). Dado un espacio de probabilidad no conmutativo (\mathcal{A}, ϕ) . Decimos que $(\mathcal{A}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ subálgebras de \mathcal{A} son independientes en el sentido libre si se cumple

$$\phi(a_1 \cdots a_m) = 0,$$

para toda elección de $m \in \mathbb{N}$, toda función $\sigma : [m] \rightarrow \Lambda$ que cumpla $\sigma(i) \neq \sigma(i+1)$ para todo $i < m$ y $a_j \in \mathcal{A}_{\sigma(j)}$ tales que $\phi(a_j) = 0$ para cada $j \in [m]$.

Ejemplo 1.15. Consiremos de nuevo como nuestro EPNC al álgebra de grupo del Ejemplo 1.11. Sea $G = G_1 * G_2$ el producto libre de dos grupos, entonces veamos que G_1 y G_2 (tomados con la inclusión) son independientes libres. Para esto consideremos a_1, \dots, a_m como en la Definición 1.14. Como $\phi(a_i) = 0$ para cada a_i , entonces cada elemento tiene coeficiente 0 en su respectiva identidad. Como los elementos deben alternar álgebra, y el producto de elementos de distinta álgebra son irreducibles, tenemos que $a_1 \cdots a_n$ es suma de productos distintos de la identidad e irreducibles. Por lo tanto $\phi(a_1 \cdots a_n) = 0$, que es lo que queríamos demostrar.

Definición 1.16 (Independencia booleana). Dado un espacio de probabilidad no conmutativo (\mathcal{A}, ϕ) . Decimos que $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ subálgebras de \mathcal{A} son independientes en el sentido booleano si se cumple

$$\phi(a_1 \cdots a_m) = \phi(a_1)\phi(a_2 \cdots a_m),$$

para toda elección de $m \in \mathbb{N}$, $a_j \in A_{\sigma(j)}$ y toda función $\sigma : [m] \rightarrow \Lambda$ que cumpla $\sigma(i) \neq \sigma(i+1)$ para todo $i < m$.

Notemos que esta noción de independencia es equivalente a pedir que se cumpla

$$\phi(X_1 \cdots X_n) = \phi(X_1) \cdots \phi(X_n),$$

con las mismas hipótesis sobre los X_i s.

Ejemplo 1.17. Sea $A := \mathcal{M}^{n \times n}(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{M}^{m \times m}(\mathbb{C}) = B(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m)$. Consideremos una base ortogonal e_1, \dots, e_n de \mathbb{C}^n y $\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_m$ de \mathbb{C}^m . Tomemos $\phi(A) := \langle A(e_1 \otimes \hat{e}_1), e_1 \otimes \hat{e}_1 \rangle$.

Si identificamos a $\mathcal{M}^{n \times n}(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{M}^{m \times m}(\mathbb{C})$ con $M_{nm \times mn}$ (es decir, viendo a A como una matriz de $nm \times mn$), tendríamos $\phi(A) = A_{11}^{1,1}$, justo como en el Ejemplo 1.8.

Consideremos la proyección P_1 de \mathbb{C}^n a \mathbb{C}^n que cumple $P_1 e_1 = e_1$ y $P_1 e_j = 0$ para $j \neq 1$. Análogamente tomamos a P_2 en $\mathbb{C}^{m \times m}$. Sea \mathcal{A}_1 el espacio de matrices de la forma $P_1 \otimes M$ y \mathcal{A}_2 las de la forma $N \otimes P_2$. Vamos a probar que \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 son independientes en el sentido Booleano.

Notemos primero que $\phi(P_1 \otimes M) = M_{1,1}$ y $\phi(N \otimes P_2) = N_{1,1}$. Consideremos $X = X_1 X_2 \cdots X_r$ un producto alternado de elementos de \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 . Notemos que $(P_1 \otimes M)(N \otimes P_2) = (P_1 N) \otimes (M P_2)$. Dependiendo la forma en la que alternamos álgebras, los productos en X se alternan de distinta forma, por ejemplo X puede verse como $(P_1 M_1 P_1 \cdots) \otimes (N_1 P_2 \cdots)$ con una cantidad finita e igual de elementos en ambos lados del producto tensorial. La primera entrada de X es el producto de la primera entrada de ambos elementos en el producto tensorial. La primera entrada de cada elemento en el producto

tensorial es el producto de las primeras entradas de M_1, M_2, \dots y N_1, N_2, \dots respectivamente. Esto nos dice que

$$\phi(X_1 X_2 \dots X_r) = \phi(X_1) \cdots \phi(X_r).$$

Independientemente de como se alternen las álgebras \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 en el producto podemos calcular $\phi(X)$ de forma similar, por lo que \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 son independientes en el sentido booleano.

La siguiente noción de independencia no es simétrica, es decir, si A_1 es independiente de A_2 en el sentido monótono, no significa que A_2 es independiente de A_1 en el sentido monótono.

Definición 1.18 (Independencia Monótona). Dado un espacio de probabilidad no conmutativo (\mathcal{A}, ϕ) . Decimos que \mathcal{A}_1 es independientes de \mathcal{A}_2 en el sentido Monótono si se cumple que

$$\phi(a_1 \cdots a_{2m}) = \phi(a_1 \cdots a_{2m-1})\phi(a_2) \cdots \phi(a_{2m})$$

para toda elección de $m \in \mathbb{N}$ y a_i s alternando álgebras. También se debe cumplir

$$\phi(a_1 \cdots a_{2m-1}) = \phi(a_1 \cdots a_{2m-1})\phi(a_2) \cdots \phi(a_{2m-2})$$

para toda elección de $m \in \mathbb{N}$ y a_i s alternando álgebras.

Ejemplo 1.19. Sea $\mathcal{A} = \mathcal{M}^{n \times n}(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{M}^{m \times m}(\mathbb{C})$ y $\nu = \sum_{j=1}^m e_1 \otimes e_m$. Entonces definimos ϕ como:

$$\phi(A) := \langle A(\nu), \nu \rangle = \langle A(\sum_{j=1}^m e_1 \otimes e_j), \sum_{j=1}^m e_1 \otimes e_j \rangle.$$

Si identificamos a $\mathcal{M}^{n \times n}(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{M}^{m \times m}(\mathbb{C})$ con $M_{nm \times mn}(\mathbb{C})$ utilizando dos bases canónicas ortogonales (es decir, viendo a A como una matriz de $nm \times mn$), tendríamos $\phi(A) = \frac{1}{m}(A_{1,1}^{1,1} + A_{1,1}^{2,2} + \dots + A_{1,1}^{m,m})$.

Consideremos la proyección P_1 de \mathbb{C}^n a \mathbb{C}^n que cumple $P_1 e_1 = e_1$ y $P_1 e_j = 0$ para $j \neq 1$. Sea \mathcal{A}_1 el álgebra de matrices de la forma $P_1 \otimes M$ y \mathcal{A}_2 las de la forma $N \otimes Id$. Vamos a probar que \mathcal{A}_1 es independiente de \mathcal{A}_2 en el sentido monótono.

Notemos primero que

$$\phi(A \otimes B) = \frac{A_{1,1}}{m}(B_{1,1} + \dots + B_{m,m}),$$

por lo que $\phi(P_1 \otimes M) = \frac{1}{m}(M_{1,1} + \dots + M_{m,m})$ y $\phi(N \otimes Id) = N_{1,1}$. De hecho, observemos que estamos tomando una representación del Ejemplo 1.9 y del Ejemplo 1.8.

Consideremos $X = X_1 X_2 \dots X_{2r}$ un producto alternado de elementos de \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 como en la Definición 1.18. Notemos que $(P_1 \otimes M)(N \otimes Id) = (P_1 N) \otimes (M)$. Por lo que podemos ver que X es, por ejemplo, de la forma $P_1 N_1 P_1 \dots P_1 N_r \otimes M_1 M_2 \dots M_r$. Así

$$\begin{aligned} \phi(X) &= (P_1 N_1 \dots P_1 N_r)_{1,1} \phi(Id \otimes (M_1 \dots M_r)) \\ &= \phi(X_1 X_3 \dots X_{2r-1}) \phi(X_2) \dots \phi(X_{2r}), \end{aligned}$$

lo mismo sucede cuando hay cantidad impar de productos y cuando alternamos las álgebras comenzando con \mathcal{A}_2 , con lo que concluimos el ejemplo.

Capítulo 2

Cumulantes

En este capítulo estudiaremos los preliminares de combinatoria necesarios para utilizar una de las varias definiciones de los cumulantes.

Cuando factorizamos los momentos mixtos, aparecen algunas estructuras de manera recurrente. El lenguaje de conjuntos parcialmente ordenados nos permitirá hablar de esta estructura de manera más precisa.

Definiremos un orden parcial en el conjunto de particiones de un conjunto finito fijo. Con ésto tendremos las herramientas necesarias para trabajar la combinatoria de los cumulantes, lo que es de nuestro interés en este trabajo, pues nos interesa estudiar la relación entre los distintos tipos de cumulantes. En particular, nos interesará la relación entre cumulantes clásicos y monótonos.

Las primeras tres secciones sobre combinatoria de este capítulo están basados en las definiciones y ejemplos de [2]. Las definiciones y ejemplos de la Sección 2.4, dedicada puramente a cumulantes, están basados en [1].

2.1. Conjuntos parcialmente ordenados

Para nuestro estudio de espacios de probabilidad no conmutativos utilizaremos principalmente herramientas de combinatoria, por lo que dedicaremos este capítulo a desarrollar las herramientas básicas que utilizaremos. Vamos a definir la estructura de conjuntos parcialmente ordenados, definiremos el álgebra de incidencia de un conjunto parcialmente ordenado y algunas funciones especiales que se utilizan comunmente, las funciones μ , ζ y δ .

Definición 2.1. Un conjunto parcialmente ordenado (también llamado CO-PO) es un par (C, \geq_C) con C un conjunto y \geq_C una relación entre algunos de los elementos de C , que cumple las siguientes propiedades

- Si tenemos $x \geq_C y$ y $y \geq_C z$ entonces se cumple $x \geq_C z$. Esta propiedad es conocida como transitividad.
- Si tenemos $x \geq_C y$ y $y \geq_C x$ entonces se cumple $x = y$.
- Se tiene $x \geq_C x$ para todo $x \in C$. Esta propiedad es conocida como reflexividad.

Si se tiene que $x \geq_C y$ pero no se tiene $y \geq_C x$, entonces escribimos $x >_C y$. Si se cumple $x \geq_C y$ entonces también usamos la notación $y \leq_C x$ para referirnos a $x \geq_C y$, así como $y <_C x$ para referirnos a $x >_C y$.

Escribiremos solamente el signo \geq , en lugar del signo \geq_C , en algunas ocasiones en las que el contexto lo permita.

Definición 2.2. Sea (C, \geq_C) un COPO. Tenemos:

- Si para todo par $x, y \in C$ se cumple que $x \geq y$ o $y \geq x$ entonces decimos que C es un conjunto totalmente ordenado.
- Dados $x, y \in C$ fijos. Si se cumple $x > y$ pero no existe un $z \in C$ tal que $x > z > y$ entonces diremos que x cubre a y .
- Si existe un $x \in C$ tal que $y \geq x$ para todo $y \in C$, denotamos a x por $\hat{0}_C$. De existir dicho elemento es único, pues $x \geq_C y$ y $y \geq_C x$ implica $x = y$.
- Si existe un $x \in C$ tal que $x \geq y$ para todo $y \in C$, denotamos a x por $\hat{1}_C$. De existir dicho elemento es único, pues $x \geq_C y$ y $y \geq_C x$ implica $x = y$.
- Dados $x, y \in C$ con $x \leq y$. Definimos el intervalo entre x y y como $[x, y] := \{z \in C \mid x \leq z \leq y\}$. Al conjunto de intervalos en C lo denotamos por $Int(C)$.
- Si C cumple que para todos $x, y \in C$ fijos, el conjunto $[x, y]$ es finito, decimos que el COPO es localmente finito.
- Si tenemos un conjunto de elementos $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq C$ tales que $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, entonces llamamos a dicho conjunto una cadena.
- Una cadena $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq C$ es maximal si no existe $z \in C \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ tal que $\{x_1, \dots, x_n, z\}$ forme una cadena.

Los ejemplos de conjuntos parcialmente ordenados abundan en la literatura. Los siguientes son algunos de ellos:

Ejemplo 2.3.

1. El par (\mathbb{R}, \geq) es un conjunto totalmente ordenado pero no es localmente finito. Los intervalos en la definición de COPO de \mathbb{R} coinciden con la definición usual de intervalos cerrados en \mathbb{R} .
2. Sea A un conjunto, podemos tomar una familia \mathcal{F} de subconjuntos de A como C y como \geq_c a \subseteq .
3. Sea n un número natural. Tomemos como C al conjunto de divisores de n y como \leq_C a la relación de $a|b$ si a divide a b . A este COPO lo denotamos como D_n . D_n no siempre es totalmente ordenado. También podemos considerar a todo el conjunto \mathbb{N} con dicha relación, por lo que obtenemos un COPO localmente finito pero con infinitos elementos. En este caso $\hat{0} = 1$.
4. Consideremos como C a \mathbb{R}^2 y la relación $(a, b) \geq_C (x, y)$ si $a \geq x$ y $b \geq y$.
5. Si tomamos $C = [n] = \{1, 2, \dots, n\}$ y la relación \geq de \mathbb{R} , llamamos a dicho COPO C_n . C_n es conocido como la cadena de longitud n .

Para COPOs finitos y con suficiente estructura, podemos definir una noción de rango.

Definición 2.4. Dado un COPO finito (C, \geq_C) decimos que C es graduado si todas las cadenas maximales en C tienen la misma cardinalidad.

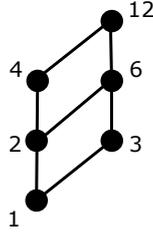
Definición 2.5. Si tenemos C un COPO graduado, definimos la función de rango $\rho : C \rightarrow \mathbb{N}$ recursivamente. $\rho(s) := 0$ si $s \in C$ es minimal y para $t, r \in C$ $\rho(t) = \rho(r) + 1$ si t cubre a r .

Tenemos que C_n es graduado con $\rho(m) = m - 1$ para $m \in C_n$. También D_n es graduado, si $m \in D_n$ y factorizamos a m en factores primos $m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ entonces $\rho(m) = \alpha_1 + \dots + \alpha_k$.

Definición 2.6. Sea (C, \geq_C) un COPO finito. La gráfica G con conjunto de vértices C y aristas $E = \{\{x, y\} \subseteq V \mid x \text{ cubre a } y\}$ se conoce como diagrama de Hasse.

Típicamente, en una realización geométrica de G , si x cubre a y éste se dibuja más arriba.

Ejemplo 2.7. Consideremos el COPO D_{12} . Su diagrama de Hasse es

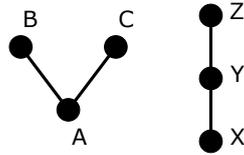


Definición 2.8. Un isomorfismo entre dos copos (P_1, \geq_1) y (P_2, \geq_2) es una función $f : P_1 \rightarrow P_2$ tal que f es biyectiva y se cumple que $x \geq_1 y$ si y sólo si $f(x) \geq_2 f(y)$. Decimos que f es un antiisomorfismo si en lugar de eso se cumple que $x \geq_1 y$ si y sólo si $f(x) \leq_2 f(y)$.

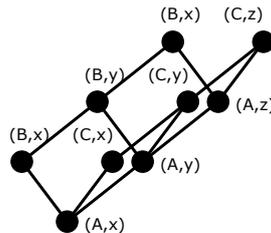
Por ejemplo, $D_{p^{n-1}}$ es isomorfo a C_n para todo p primo, con el isomorfismo $f(p^k) = k + 1$.

Definición 2.9. El producto directo de los COPOs (P_1, \geq_1) y (P_2, \geq_2) es el COPO $(P_1 \times P_2, \geq_3)$ tal que $(x, y) \geq_3 (z, v)$ si y sólo si $x \geq_1 z$ y $y \geq_2 v$.

Ejemplo 2.10. Si tomamos P_1 y P_2 con los siguientes diagramas de Hasse:



Entonces el diagrama de Hasse de $P_1 \times P_2$ es



Definición 2.11. Definimos al COPO Q_n recursivamente. Comenzamos con $Q_1 := C_2$ y para $n \geq 1$ tomamos $Q_{n+1} := Q_1 \times Q_n$.

Ahora veremos una propiedad general de los COPOs finitos, que utilizaremos a la hora de introducirles una estructura algebraica.

Teorema 2.12. Si tenemos un COPO $P_0 = (P, \geq_0)$ finito, podemos construir un COPO $T = (P, \geq_t)$ totalmente ordenado y de modo que $x \geq_0 y$ implica $x \geq_t y$.

Demostración. Vamos construir COPOs inductivamente hasta obtener a T . Si $P_i = (P, \geq_i)$ no es totalmente ordenado, construimos inductivamente la cadena más larga $\{x_1, \dots, x_j\}$ tal que $x_j >_i \dots >_i x_1$ y tal que para todo $y \in P_i \setminus \{x_1, \dots, x_j\}$ se cumple $y >_i x_j$.

Supongamos que P_i no es totalmente ordenado. Tomemos un $x_{j+1} \in P_i \setminus \{x_1, \dots, x_j\}$ que no cumpla $x_{j+1} > y$ para ningún $y \in P_i \setminus \{x_1, \dots, x_j, x_{j+1}\}$, dicho elemento existe pues si comenzamos con un $y_1 \in P \setminus \{x_1, \dots, x_j\}$ arbitrario y tomamos inductivamente $y_{n+1} \in P \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ con $y_n > y_{n+1}$, como P es un conjunto finito, obtendremos a nuestro x_{j+1} como el último y_n de nuestra sucesión.

Construimos P_{i+1} considerando a la relación \geq_i y agregando la relación $y >_{i+1} x_j$ para todo $y \in P_i \setminus \{x_1, \dots, x_{j-1}, x_j\}$.

La transitividad se respetaba en \geq_i y los casos en los que debemos verificar que se cumple la transitividad para \geq_{i+1} son los que involucran a desigualdades que acabamos de agregar. Es decir, veamos que si $y \geq_{i+1} x_j$ y $x_j \geq_{i+1} z$ entonces $z \in \{x_1, \dots, x_{j+1}\}$, por lo que $y \geq_{i+1} z$. Si $y \geq_{i+1} z$ y $z \geq_i x_{j+1}$ se cumple $y \geq x_{j+1}$, por lo que \geq_{i+1} es transitiva. La reflexividad se mantiene desde \geq_0 . Ahora, como en P_i no existen parejas $x, y \in P$ con $x \geq_i y$, $y \geq_i x$ y $x \neq y$, de existir una pareja así en P_{i+1} debimos haberla creado cuando agregamos relaciones. Si $z \neq x_{j+1}$ y $z \geq_{i+1} x_{i+1}$, entonces se tiene que $z \in P \setminus \{x_1, \dots, x_{j+1}\}$, por lo que no es posible $x_{j+1} \geq_{i+1} z$, pues no se tenía $x_{j+1} \geq_i z$ y no agregamos dicha relación. Otenemos que P_{i+1} es en efecto un COPO.

De este modo podemos obtener una cadena de elementos cada vez más grande y de modo que todos los elementos en la cadena son menores a cualquier elemento fuera de ella.

Existe más de una manera de elegir al elemento que hará crecer nuestra cadena, por lo que éste procedimiento no nos genera una construcción única para extender nuestro COPO a un orden total. Una vez realizado el procedimiento a lo más $|P|$ veces, obtenemos nuestro COPO T . \square

El resultado anterior lo utilizaremos posteriormente. Ahora que tenemos suficientes ejemplos de COPOs, comenzaremos a utilizar su estructura para definir una estructura algebraica, hacer calculos y enumerar objetos.

Definición 2.13. Dado un COPO localmente finito (C, \geq) , podemos asignarle el álgebra de incidencia $I(C, \geq_C)$, esta se define como el conjunto de funciones $f : Int(C) \rightarrow \mathbb{C}$. A este conjunto de funciones podemos darle una estructura de álgebra sobre \mathbb{C} definiendo las operaciones de suma, producto escalar y producto:

- Dados $f, g \in I(C, \geq_C)$, definimos $(f + g)(x, y) := f(x, y) + g(x, y)$.

- Dado $c \in \mathbb{C}$ y $f \in I(C, \geq_C)$, definimos $(cf)(x, y) := c(f(x, y))$.
- Dados $f, g \in I(C, \geq_C)$, definimos $(f * g)(x, y) := \sum_{x \leq z \leq y} f(x, z)g(z, y)$. Esta operación es conocida como convolución.

Ya que dado un COPO finito C podemos extender la relación \geq_C hasta obtener un orden total, podemos etiquetar los elementos de un COPO finito o de un intervalo en un COPO localmente finito como $\{x_1, \dots, x_n\}$, de modo que $x_i \geq_C x_j$ implica $i \geq j$.

Dado un COPO finito C , una extensión $T = \{x_1, \dots, x_n\}$ a orden total de C y un elemento $f \in I(C, m \geq_C)$. Podemos escribir a f en representación matricial M_f , escribiendo los elementos de C ordenados de acuerdo al orden total de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo en las filas y columnas respectivamente. Utilizamos como entradas $(M_f)_{i,j} := f(x_i, x_j)$ si $x_i \leq_C x_j$ y $(M_f)_{i,j} := 0$ si no se cumple $x_i \leq_C x_j$.

Es claro que si M_f y M_g son las matrices asociadas a $f, g \in I(C, \geq_C)$, entonces $M_{f+g} = M_f + M_g$. También es claro que $M_{cf} = cM_f$ para todos $c \in \mathbb{C}$ y $f \in I(C, \geq_C)$.

Proposición 2.14. *Dados $f, g \in I(P, \geq)$, se cumple*

$$M_{f*g} = M_f M_g.$$

Demostración. Notemos que para $i, j \in [n]$ se tiene $(M_f)_{i,m}(M_g)_{m,j} \neq 0$ para los $m \in [n]$ tales que $x_i \leq x_m \leq x_j$. Si no tenemos $x_i \leq x_j$, se cumple

$$(M_f M_g)_{i,j} = 0.$$

Si tenemos $x_i \leq x_j$, se cumple

$$(M_f M_g)_{i,j} = \sum_{x_i \leq x_m \leq x_j} f(x_i, x_m)g(x_m, x_j) = (M_{f*g})_{i,j}.$$

□

Notemos que dados $f, g, h \in I(C, \geq)$, entonces $f * (g * h)$ está asociado a la matriz $M_f(M_g M_h) = (M_f M_g)M_h$ que a su vez está asociado al producto $(f * g) * h$, por lo que la operación convolución es asociativa. También se cumple $(f + cg)(x, y) = f(x, y) + c(g(x, y))$ por lo que concluimos que el álgebra de incidencia de un COPO es en efecto un álgebra sobre \mathbb{C} .

Definición 2.15. Dado un COPO podemos considerar las funciones $\zeta, \delta \in I(C, \geq)$ definidas como

$$\zeta(x, y) := 1, \text{ para todo } x \geq y,$$

$$\delta(x, y) := \begin{cases} 0, & \text{si } x > y, \\ 1, & \text{si } x = y. \end{cases}$$

Notemos que $M_\delta = Id_n$, lo nos dice que la propiedad $\delta * f = f * \delta = f$ se cumple para toda $f \in I(C, \geq)$.

Definición 2.16. Sea C un COPO fijo localmente finito, definimos $\mu_C \in I(C, \geq)$ inductivamente

$$\mu_C(x, y) := \begin{cases} 1 & \text{si } x=y, \\ -\sum_{x \leq z < y} \mu_C(x, z) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Como $\mu_C(x, y)$ sólo depende de la estructura de COPO de $[x, y]$, y es finito, entonces $\mu_C(x, y)$ se encuentra bien definido aunque C sea infinito.

Para $\pi \neq \sigma$ se cumple

$$\sum_{\pi \leq \rho \leq \sigma} \mu_C(\pi, \rho) = 0.$$

Lo anterior nos dice que

$$\mu_C * \zeta = \delta.$$

Obtenemos que $M_\mu M_\zeta = Id_n$. Se cumple $M_\zeta M_\mu = Id_n$, por lo que $\zeta * \mu_C = \delta$, entonces obtenemos que

$$\sum_{x \leq z \leq y} \mu_C(z, y) = \delta(x, y).$$

Esto significa que

$$\mu_C(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y, \\ -\sum_{x < z \leq y} \mu_C(z, y) & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

por lo que podemos definir a μ_C de ambas formas y son equivalentes.

Ejemplo 2.17. Si consideramos al COPO C_n tenemos que $\mu(1, 1) = 1$, luego $\mu(1, 2) = -1$ y $\mu(1, m) = 0$ para $m \in [n]$, $m > 2$.

Teorema 2.18. Sean $C_1 = (P_1, \geq_1)$ y $C_2 = (P_2, \geq_2)$ dos COPOs. Sea $C_3 := C_1 \times C_2 = (P_1 \times P_2, \geq_3)$, $a, b \in P_1$ y $x, y \in P_2$ con $a \leq_1 b$ y $x \leq_2 y$. Se cumple

$$\mu_{C_3}((a, x), (b, y)) = \mu_{C_1}(a, b) \mu_{C_2}(x, y).$$

Demostración. Sea T_1 un orden total de C_1 con etiquetado $\{x_1, \dots, x_n\}$ y T_2 un orden total de C_2 con etiquetado $\{y_1, \dots, y_m\}$.

Tomemos la relación $(x_i, y_j) \leq_* (x_k, y_r)$ si $i < k$ y $(x_i, y_j) \leq_* (x_i, y_r)$ si $j \leq r$. Obtenemos un orden total de C_3 , $T_3 := (P_1 \times P_2, \geq_*)$, que asigna a (x_i, y_j) la etiqueta $n(i-1) + j$.

Es un orden total, pues todos los elementos de $P_1 \times P_2$ son comparables y si $(x_i, y_j) \leq_3 (x_k, y_r)$ entonces tenemos $x_i \leq_1 x_k$ y $y_j \leq_2 y_r$, lo que quiere decir que $i \leq k$ y $j \leq r$, entonces $n(i-1) + j \leq n(k-1) + r$ (es decir, T_3 sí extiende el orden parcial de C_3).

Utilizaremos tres bases canónicas ortogonales e_1, \dots, e_n de \mathbb{C}^n , $\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_m$ de \mathbb{C}^m y $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{nm} \in \mathbb{C}^{nm}$. Identificamos a $A \in \mathcal{M}^{n \times n}(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{M}^{m \times m}(\mathbb{C})$ con la matriz $\hat{A} \in \mathcal{M}^{nm \times mn}(\mathbb{C})$ tal que se cumple

$$\begin{aligned} (\hat{A})_{n(i-1)+j, n(k-1)+r} &= \langle \hat{A} \bar{e}_{n(i-1)+j}, \bar{e}_{n(k-1)+r} \rangle \\ &= \langle A e_i \otimes e_j, e_k \otimes e_r \rangle \\ &= (A)_{i,k}^{j,r}. \end{aligned}$$

Es una identificación conocida, que es un isomorfismo de álgebras.

Veamos que M_{ζ_3} y $M_{\zeta_1} \otimes M_{\zeta_2}$ coinciden con la identificación anterior, vamos a revisar esto entrada por entrada.

Notemos que

$$(M_{\zeta_1} \otimes M_{\zeta_2})_{i,k}^{j,r} = 1,$$

siempre que $x_i \leq_1 x_k$ y $y_k \leq_2 y_r$. La entrada es 0 en caso contrario. Observemos que

$$(M_{\zeta_3})_{n(i-1)+j, n(k-1)+r} = 1,$$

siempre que $z_{n(i-1)+j} \leq_3 z_{n(k-1)+r}$, que es cuando $(x_i, y_j) \leq_3 (x_k, y_r)$, equivalente a $x_i \leq_1 x_k$ y $y_k \leq_2 y_r$. La entrada es 0 en otro caso. Por lo que la asignación sí los vuelve iguales.

Notemos que se cumple que $M_{\mu_3} M_{\zeta_3} = Id_{mn}$ y se cumple que $(M_{\mu_1} \otimes M_{\mu_2})(M_{\zeta_1} \otimes M_{\zeta_2}) = Id_n \otimes Id_m$. Por lo que la asignación matricial también hace que M_{μ_3} y $M_{\mu_1} \otimes M_{\mu_2}$ sean iguales. Con esto obtenemos que

$$\begin{aligned} \mu_3((x_i, y_j), (x_k, y_r)) &= (M_{\mu_3})_{n(i-1)+j, n(k-1)+r} \\ &= (M_{\mu_1} \otimes M_{\mu_2})_{i,k}^{j,r} \\ &= \mu_1(x_i, x_k) \mu_2(x_j, y_r), \end{aligned}$$

que es lo que queríamos probar. \square

Esta es una propiedad muy útil a la hora de calcular $\mu(\pi, \sigma)$ pues nos permite aprovechar la estructura de $[\pi, \sigma]$ como intervalo. Si podemos escribir $[\pi, \sigma]$ como un producto de la forma $C_1 \times C_2$, entonces los cálculos de μ se reducen a hacerlos cálculos en C_1 y C_2 . Cuando una función en el álgebra de incidencia puede factorizarse sobre el producto directo de COPOs diremos que es multiplicativa.

Teorema 2.19 (Fórmula de inversión de Möbius). Sean (P, \geq) un COPO y $f, g : P \rightarrow \mathbb{C}$ dos funciones tales que

$$g(t) = \sum_{s \leq t} f(s), \forall t \in P.$$

Se cumple

$$f(t) = \sum_{s \leq t} g(s) \mu(s, t), \forall t \in P.$$

Demostración. Sea T un orden total de P y sea $\{x_1, \dots, x_n\}$ un etiquetado del orden total. Consideremos el vector $v_f := (f(x_i))_{i \in [n]} \in \mathbb{C}^n$ y al vector $v_g = (g(x_i))_{i \in [n]} \in \mathbb{C}^n$. Notemos que

$$g(x_i) = \sum_{x_j \leq x_i} f(x_j).$$

Como se satisfase $(M_\zeta)_{j,i} = 1$ si $x_j \leq x_i$ y $(M_\zeta)_{j,i} = 0$ en otro caso, obtenemos

$$g(x_i) = \sum_{j=1}^n f(x_j) (M_\zeta)_{j,i}.$$

Se sigue que

$$v_g = v_f M_\zeta,$$

$$v_g M_\mu = v_f,$$

$$\sum_{j=1}^n g(x_j) (M_\mu)_{j,i} = f(x_i),$$

$$\sum_{x_j \leq x_i} g(x_j) \mu(x_j, x_i) = f(x_i),$$

que es lo que queríamos demostrar. \square

2.2. Particiones

Hasta ahora, la mayoría de COPOs que hemos estudiado han sido isomorfos al producto cartesiano de cadenas. Vamos a considerar las particiones como COPO, que tienen una estructura un poco más compleja.

Definición 2.20. Dado un conjunto finito A , definimos $P(A)$ el conjunto de particiones de A . Esto significa que

$$P(A) := \{\sigma = \{V_1, \dots, V_m\} \mid \emptyset \neq V_i \subseteq A, \cup_{i=1}^m V_i = A, V_i \cap V_j = \emptyset \text{ si } i \neq j\}.$$

Es decir, $P(A)$ contiene las particiones de A en conjuntos disjuntos.

Vamos a integrar una estructura de COPO a $P(A)$. Si $\pi, \sigma \in P(A)$, decimos que $\sigma \geq \pi$ si para todo $V_i \in \pi$ existe $U_j \in \sigma$ tal que $V_i \subseteq U_j$. Cuando los bloques de π están contenidos en los de σ decimos que π es un refinamiento de σ .

Veamos que el objeto definido es en efecto un COPO. Sea $|A|$ un conjunto finito y $P(A)$ como en la definición. La reflexividad en $P(A)$ se cumple de manera directa.

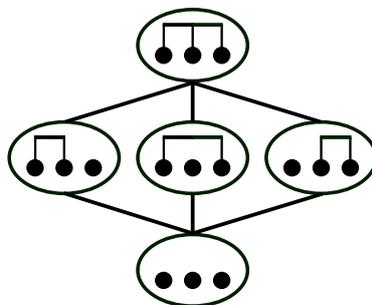
Sean $\pi, \sigma, \gamma \in P([n])$, si tenemos $\pi \geq \sigma$ y $\sigma \geq \gamma$ entonces la transitividad en la contención de conjuntos nos dicen que cada bloque de γ está contenido en un bloque de π , por lo que $\pi \geq \gamma$.

Podemos tener una biyección entre las particiones en conjuntos de un conjunto fijo A con el conjunto de relaciones de equivalencia en A . Vamos a asignare a $\sigma \in P(n)$ una relación de equivalencia \sim_σ . De modo que $x \sim_\sigma y$ si y sólo si $x, y \in V_i \in \sigma$ para algún i .

Sean $\pi, \sigma \in P(A)$. Observemos que $\pi \geq \sigma$ si y sólo si, $x \sim_\sigma y$ implica $x \sim_\pi y$ para todo $x, y \in A$. Tenemos de manera semejante que si $\sigma \geq \pi$ entonces $x \sim_\pi y$ implica $x \sim_\sigma y$ para todo $x, y \in A$. Por lo que, si $\pi \geq \sigma$ y $\sigma \geq \pi$, obtenemos que \sim_π y \sim_σ son iguales y por lo tanto $\pi = \sigma$. Concluimos que $(P(A), \geq)$ es en efecto un COPO.

Es claro que si $|A| = n$ entonces $P(A)$ es isomorfo a $P([n])$ por lo que vamos a trabajar principalmente con $P(n) := P([n])$. Tenemos que, de la Definición 2.2, se sigue que $\hat{1}_{P(n)} = \{\{1, 2, \dots, n\}\}$ y $\hat{0}_{P(n)} = \{\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}\}$. Usaremos la notación $\hat{1}_n := \hat{1}_{P(n)}$ y $\hat{0}_n := \hat{0}_{P(n)}$.

Representaremos a π dibujando cada elemento de $[n]$ como un punto en una fila, uniremos por líneas a los elementos de un mismo bloque. A esto se le conoce como representación lineal. Consideremos por ejemplo $P(3)$, su diagrama de Hasse es



Notemos que dada una partición $\pi \in P(n)$ con bloques $\pi = \{V_1, \dots, V_k\}$, si se cumple que $\pi \geq \sigma \geq \hat{0}_n$ para algún $\sigma \in P(n)$, entonces tenemos que los bloques de sigma se pueden acomodar de modo que obtenemos una partición de los elementos de V_i para cada $i = 1, \dots, k$. Esto nos dice que $[\hat{0}_n, \pi]$ es isomorfo a $P(|V_1|) \times \dots \times P(|V_k|)$.

Teorema 2.21. *Se cumple*

$$\mu_P(\hat{0}, \hat{1}_n) = (-1)^{n-1}(n-1)!, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Procederemos por inducción. Como en $P(1)$ se cumple $\hat{0} = \hat{1}$, entonces tenemos $\mu_P(\hat{0}, \hat{1}) = 1$. Supongamos que la fórmula es cierta hasta $n \in \mathbb{N}$ y queremos probar

$$\mu_P(\hat{0}_n, \hat{1}_{n+1}) = (-1)^n(n)!.$$

Como $n+1 > 1$, tenemos

$$\mu_P(\hat{0}_{n+1}, \hat{1}_{n+1}) = - \sum_{\pi \in P(n+1), \pi \neq 1} \mu_P(\hat{0}_{n+1}, \pi).$$

Como μ_P es multiplicativa consideremos dividir la suma. Fijemos el bloque V_1 al que pertenece 1 en π . De este modo podemos factorizar:

$$\sum_{\pi \in P(n+1), \pi \neq 1} \mu_P(\hat{0}_n, \pi) = \left(\sum_{1 \in V_1} \mu_P(\hat{0}_{|V_1|}, \hat{1}_{|V_1|}) \right) \left(\sum_{\sigma \in P(n+1-|V_1|)} \mu_P(0_{n+1-|V_1|}, \sigma) \right).$$

Como $\sum_{\sigma \in P(m)} \mu_P(0_m, \sigma) = 0$ para todo entero $m > 1$, para que la segunda suma no sea 0, se debe cumplir que $|V_1| = n$. Obtenemos

$$\sum_{\pi \in P(n+1), \pi \neq 1} \mu_P(\hat{0}_{n+1}, \pi) = \sum_{1 \in V_1, |V_1|=n} \mu_P(0_n, \hat{1}_n).$$

De modo que, como hay n formas de elegir un elemento de $\{2, 3, \dots, n+1\}$ para que no esté en V_1 , entonces se tiene

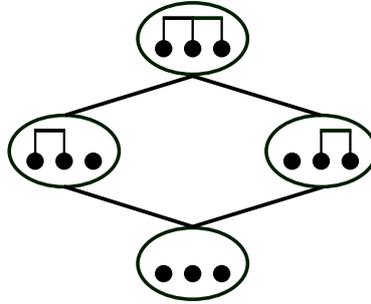
$$\begin{aligned} \mu_P(0_{n+1}, \hat{1}_{n+1}) &= - \sum_{\pi \in P(n+1), \pi \neq 1} \mu_P(\hat{0}_n, \pi) \\ &= -n(-1)^{n-1}(n-1)! \\ &= (-1)^n n!, \end{aligned}$$

lo que concluye la prueba por inducción. □

Vamos a considerar COPOS cuyos elementos son algunas de las particiones de $P(n)$ y que heredan las relaciones de $P(n)$. A COPOS de este tipo se les conoce como subcopos.

Definición 2.22. Consideremos las particiones $\sigma \in P(n)$ en las cuales los bloques $V \in \sigma$ son de la forma $V = \{x, x + 1, \dots, y\}$ es decir, las particiones que están conformados solamente por bloques que son intervalos de números naturales. A estas particiones se les conoce como particiones por intervalos y se les denota por $I(n)$.

El diagrama de Hasse de $I(3)$ es el siguiente



Notemos que no se incluye a la partición $\{\{1, 3\}, \{2\}\} \in P(3)$.

En general podemos codificar una partición por intervalos π con un vector $v^\pi \in \{0, 1\}^{(n-1)}$. De modo que

$$(v^\pi)_j = \begin{cases} 1 & \text{si } j \sim j + 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Tenemos que $\pi \geq \sigma$ si y sólo si $v_j^\pi \geq v_j^\sigma$ para todo j , por lo que $I(n)$ es isomorfo al COPO Q_{n-1} de la Definición 2.11, se sigue que $|I(n)| = 2^{n-1}$.

Teorema 2.23. *Se cumple*

$$\mu_{I(n)}(0, \hat{1}_n) = (-1)^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Notemos primero de nuevo que para $n = 1$ se tiene $\hat{0}_n = \hat{1}_n$ y entonces $\mu_I(\hat{0}, \hat{1}_1) = 1$. Sea $n > 1$, observemos que como μ_I es multiplicativa y Q_{n-1} es isomorfo a $I(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\mu_I(\hat{0}_n, \hat{1}_n) = \mu_{Q_{n-1}}(\hat{0}, \hat{1}) = \mu_{Q_1}(\hat{0}, \hat{1})^{n-1},$$

$$\mu_I(\hat{0}, \hat{1}) = (-1)^{n-1} \forall n > 1.$$

□

Podemos evaluar los operadores \vee y \wedge en $I(n) \times I(n)$ y ver que también obtenemos una partición por intervalos.

Lema 2.24. *Dados $\sigma_1, \sigma_2 \in I(n)$ se cumple $\sigma_1 \vee \sigma_2 \in I(n)$.*

Demostración. Como vimos anteriormente, si \sim_1, \sim_2 y \sim_3 son las relaciones asociadas a σ_1, σ_2 y $\sigma_1 \vee \sigma_2$, tenemos que dados $i, j \in [n]$ con $i < j$, se cumple $i \sim_3 j$ si y sólo si $i \sim_1 j$ y $i \sim_2 j$; se cumple $i \sim_3 j$ si y sólo si $k \sim_1 k+1$ y $k \sim_2 k+1$ para $k = i+1, \dots, j-1$; se cumple $i \sim_3 j$ si y sólo si $k \sim_3 k+1$ para $k = i, i+1, \dots, j-1$. Concluimos que $\sigma_1 \vee \sigma_2$ es una partición por intervalos. \square

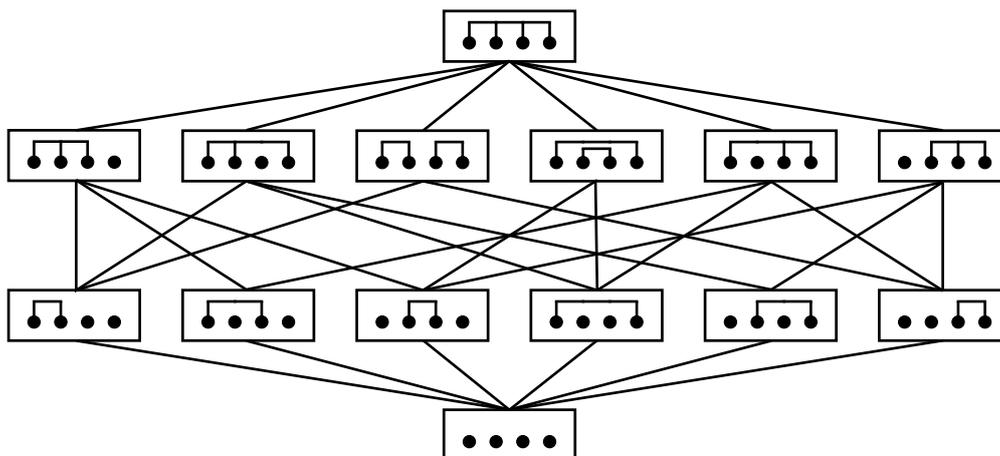
Con esto tenemos que la restricción de \vee a $I(n) \times I(n)$ tiene su imagen contenida en $I(n)$ y podríamos definir al operador \vee de la misma manera que como lo hicimos para $P(n)$, en lugar de utilizando la restricción.

Lema 2.25. *Dados $\sigma_1, \sigma_2 \in I(n)$ se cumple $\sigma_1 \wedge \sigma_2 \in I(n)$.*

Ahora consideraremos otro COPO importante inducido por $P(n)$.

Definición 2.26. Una partición π que no se cruza es aquella en la que no existen x, y, u, v de modo que $x > u > y > v$ y $x, y \in V_i, u, v \in V_j$ para algún par $i \neq j$. Es aquella partición en la que en la representación lineal gráfica no hay cruces. Al COPO de particiones que no se cruzan de $[n]$ lo denotamos por $NC(n)$.

Como no hay cruces en ninguna partición de $P(3)$ tenemos que $P(3) = NC(3)$. Pero a partir de $P(4)$ comienzan a aparecer particiones con cruces. El diagrama de Hasse de $NC(4)$ es el siguiente



Los números de Catalán $(C_n)_{n=0}^{\infty}$ se pueden definir de distintas formas. En nuestro caso vamos a definirlos recursivamente.

Definición 2.27. Definimos los primeros dos números de Catalán $C_0 := 1, C_1 := 1$ y para $n > 1$ los definimos por la recursión

$$C_n := C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + \dots + C_{n-2} C_1 + C_{n-1} C_0 = \sum_{m=0}^{n-1} C_m C_{n-1-m}.$$

Podemos calcular algunos de estos números utilizando la recursión: $C_2 = 2, C_3 = 5, C_4 = 14$... Sin embargo, hay formas más sencillas de calcularlos, como con la fórmula $C_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$. La fórmula es conocida, una demostración de ella puede encontrarse en el Capítulo 2 de [1] utilizando caminos de Dyck.

Teorema 2.28. *Se cumple*

$$|NC(n)| = C_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Sea $\pi \in NC(n)$. Consideremos al bloque $V_1 \in \pi$ tal que $1 \in V_1$. Podemos clasificar las particiones $\pi \in NC(n)$ en los conjuntos A_2, \dots, A_n, A_0 de modo que $\pi \in A_j$ para $j = 2, \dots, n$ si j es el primer número tal que $1 \sim_{\pi} j$ o $\pi \in A_0$ si j no existe (lo que significaría $V_1 = \{1\}$).

El conjunto de particiones que son asignadas a un A_j fijo lo podemos poner en biyección con $NC(j-2) \times NC(n+1-j)$. De modo que si tenemos $\sigma_1 \in NC(\{2, \dots, j-1\})$ y $\sigma_2 \in NC(\{j, \dots, n\})$ Consideramos $\sigma_1 \cup \sigma_2 \in NC(\{2, \dots, n\})$ y agregamos la relación $1 \sim_{\sigma} j$ junto con las relaciones necesarias para obtener una partición.

En el caso de que dicho j no exista, nuestro conjunto está en biyección con $NC([n] \setminus \{1\})$. De modo que, para $n > 1$

$$|NC(n)| = \sum_{j=2}^n |NC(j-2)| |NC(n+1-j)| + |NC(n-1)|,$$

$$|NC(n)| = \sum_{j=0}^{n-1} |NC(j)| |NC(n-1-j)|,$$

con la convención de que $|NC(0)| = 1$.

Como se cumple $|NC(1)| = 1$, tenemos que $(|NC(n)|)_{n=0}^{\infty}$ y $(C_n)_{n=0}^{\infty}$ cumplen la misma recurrencia y condición inicial, por lo que concluimos lo deseado. \square

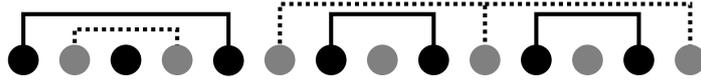
Las particiones que no se cruzan tienen además una propiedad particular, existe un antiisomorfismo de $NC(n)$ a $NC(n)$ conocido como complemento de Kreweras.

Definición 2.29. Dada una partición que no se cruza $\pi \in NC(n)$, consideremos el conjunto ordenado $\{1, \bar{1}, \dots, n, \bar{n}\}$. Definimos la partición $kr(\pi) \in NC(\{1, \bar{1}, \dots, n, \bar{n}\})$, asociada a la relación $\sim_{kr(\pi)}$, de modo que $\bar{i} \sim_{kr(\pi)} \bar{j}$ si y sólo si, no existe un par $u, v \in [n]$ con $u \sim_{\pi} v$, tal que $u \leq i < v \leq j$ o $i < u \leq j < v$.

Observación 2.30. Dada una partición $\pi \in NC(n)$, $kr(\pi)$ es la partición más grande que cumple que $\pi \cup \hat{\pi}$ es una partición que no se cruza del conjunto ordenado $\{1, \bar{1}, \dots, n, \bar{n}\}$.

Vamos a ver un ejemplo gráfico para una partición

$$\pi = \{\{1, 3\}, \{2\}, \{4, 5\}, \{6, 7\}\} \in NC(7).$$



Las líneas punteadas y los puntos grises representan los bloques de $kr(\pi)$.

Teorema 2.31. La función $kr : NC(n) \rightarrow NC(n)$ es un antiisomorfismo.

Demostración. Para esto, consideremos un par $\pi, \sigma \in NC(n)$ con $\pi \geq \sigma$. Sean $i, j \in [n]$ fijos tales que $\hat{i} \sim_{kr(\pi)} \hat{j}$ con $i < j$.

Esto quiere decir que no existen $u, v \in [n]$ con $u \sim_{\pi} v$ y $u \leq i < v \leq j$ ó $i < u \leq j < v$. Como $\pi \geq \sigma$ sabemos que no existen $u, v \in [n]$ con $u \sim_{\sigma} v$ y $u > i \geq v > j$ o $i > u \geq j > v$ esto quiere decir que $i \sim_{kr(\sigma)} j$ y por lo tanto tenemos que $\pi \geq \sigma$ implica que $kr(\pi) \leq kr(\sigma)$.

Ahora supongamos que $kr(\pi) \leq kr(\sigma)$. Sean $i, j \in [n]$ tales que $i \sim_{\sigma} j$ con $i < j$. Esto quiere decir que no existen $u, v \in [n]$ con $\hat{u} \sim_{kr(\sigma)} \hat{v}$ y $u < i \leq v < j$ ó $i \leq u < j \leq v$. Como $kr(\pi) \leq kr(\sigma)$ tenemos que no existen $u, v \in [n]$ con $\hat{u} \sim_{kr(\pi)} \hat{v}$ y $u < i \leq v < j$ ó $i \leq u < j \leq v$ y por lo tanto es necesario que $i \sim_{\pi} j$. Con esto tenemos que $kr(\pi) \leq kr(\sigma)$ implica que $\pi \geq \sigma$.

Sean $\pi, \sigma \in NC(n)$ tales que $kr(\pi) = kr(\sigma)$. Entonces es cierto que $kr(\pi) \geq kr(\sigma)$ y $kr(\pi) \leq kr(\sigma)$ por lo que también es cierto que $\pi \geq \sigma$ y $\pi \leq \sigma$ o sea que $\pi = \sigma$. Concluimos que kr es una biyección y por lo anterior es además un antiisomorfismo. \square

Teorema 2.32. Se cumple

$$\mu_{NC}(0, \hat{1}_n) = (-1)^{n-1} C_{n-1}.$$

La demostración de este teorema es extensa y requiere de herramientas que sólo usaríamos para esta prueba, por lo que se omitirá. La prueba puede encontrarse en la Parte 2, Lectura 10 de [1].

Las siguientes definiciones son utilizadas para definir y trabajar con los cumulantes monótonos.

Definición 2.33. Dada una partición $\pi \in NC(n)$ y dados dos bloques $V_i, V_j \in \pi$, decimos que V_i cubre a V_j o que V_j está anidado en V_i si se cumple que existen $x, y \in V_i$ tales $x < z < y$ para todo $z \in V_j$.

Asociamos un orden parcial a los bloques de π con la relación $V_i > V_j$ si V_i cubre a V_j .

Definición 2.34. Dada una partición $\pi \in NC(n)$, si existe un único bloque V_i tal que $V_i > V_j$ para todo $j \neq i$, entonces decimos que π es irreducible.

Si $\pi \in NC(n)$ no es irreducible, podemos descomponerlo en subparticiones maximales irreducibles π_1, \dots, π_k .

Definición 2.35. Dada una partición $\pi \in NC(n)$ con $\pi = \{V_1, \dots, V_k\}$, definimos un etiquetado monótono $\lambda : \pi \rightarrow [|\pi|]$ como una función biyectiva que cumple $\lambda(V_i) > \lambda(V_j)$ siempre que $V_i > V_j$.

Definición 2.36. A un par (π, λ) con $\pi \in NC(n)$ y λ un etiquetado monótono lo llamamos partición ordenada. Al conjunto de particiones ordenadas de $[n]$ lo denotamos por $\mathcal{M}(n)$.

Dada una partición fija, nos interesa contar cuantas particiones ordenadas (π, λ) existen. Para contarlas asociamos primero una gráfica a π .

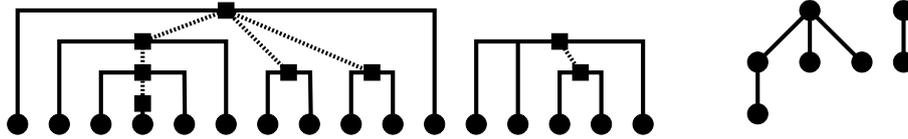
Definición 2.37. El bosque de anidamiento $\tau(\pi)$ de una partición $\pi \in NC(n)$ con k bloques es el bosque de k vértices conformado por árboles con raíz en el plano, construido de manera recursiva como

1. Si π es una partición irreducible, entonces $\tau(\pi)$ es el árbol con raíz en el plano, tal que tiene como vértices los bloques de π , su raíz es el único bloque exterior (que no está anidado en ningún otro bloque), y con ramificaciones $\tau(\pi_j)$ donde π_j son las componentes irreducibles de π después de remover el bloque exterior.
2. Si π tiene componentes irreducibles $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_r$, entonces $\tau(\pi)$ es el bosque que contienen los árboles con raíz $\tau(\pi_1), \tau(\pi_2), \dots, \tau(\pi_r)$.

El siguiente dibujo muestra la representación lineal de

$$\pi = \{\{1, 11\}, \{2, 6\}, \{3, 5\}, \{4\}, \{7, 8\}, \{9, 10\}, \{12, 13, 16\}, \{14, 15\}\},$$

junto con su bosque de anidamiento $\tau(\pi)$.



Notemos que todo etiquetado monótono de una partición $\pi \in NC(n)$ corresponde con un etiquetado creciente en su bosque de anidamiento $\tau(\pi)$. Utilizaremos una herramienta conocida como el *árbol factorial* para apoyarnos al calcular los etiquetados crecientes de $\tau(\pi)$.

Definición 2.38. El árbol factorial $t!$ de un árbol planar con raíz t , se define recursivamente. Sea t un árbol planar con $n > 0$ vértices. Si t es sólo un vértice, tomamos $t! := 1$. Si t tiene más de un vértice y tiene ramificaciones t_1, t_2, \dots, t_r , lo definimos de modo que

$$t! := n!t_1! \cdots t_r!$$

El árbol factorial de un bosque es el producto de los factoriales de cada uno de sus árboles.

Lema 2.39.

1. El número $m(\pi)$ de etiquetados monótonos de una partición $\pi \in NC(n)$ depende sólo de su bosque de anidamiento $\tau(\pi)$ y está dado por

$$m(\pi) = \frac{|\pi|!}{\tau(\pi)!}.$$

2. La función $w(\pi) = \frac{|\pi|!}{m(\pi)} = \frac{1}{\tau(\pi)!}$ es multiplicativa, es decir, si π tiene componentes irreducibles π_1, \dots, π_k , entonces

$$w(\pi) = w(\pi_1) \cdots w(\pi_k).$$

Demostración.

1. Vamos a probar inductivamente que el número de etiquetados crecientes de un árbol t es igual a $\frac{|t|!}{t!}$.

Si t sólo tiene un vértice, entonces el resultado es cierto. Supongamos que t tiene al menos dos vértices. La raíz debe ser asignada a la menor etiqueta, así que está fija. Ahora hay que distribuir las etiquetas sobrantes entre las ramificaciones t_1, \dots, t_r . Hay

$$\binom{|t| - 1}{|t_1|, |t_2|, \dots, |t_r|}$$

formas de hacer esto, y por inducción, hay $\frac{|t_i|!}{t_i!}$ etiquetados monótonos para cada ramificación t_i . Juntando ambas cosas obtenemos que la cantidad de etiquetados monótonos de t son

$$\binom{|t| - 1}{|t_1|, |t_2|, \dots, |t_r|} \frac{|t_1|!}{t_1!} \frac{|t_2|!}{t_2!} \dots \frac{|t_r|!}{t_r!} = \frac{1}{|t|} \frac{|t|!}{t_1! t_2! \dots t_r!} = \frac{|t|!}{t!}.$$

2. Este resultado es inmediato del hecho de que el árbol factorial es multiplicativo por componentes.

□

2.3. Funciones generadoras

Vamos a trabajar con funciones generadoras y series formales, estas nos ofrecen herramientas de combinatoria enumerativa que a su vez utilizaremos para calcular algunas evaluaciones en el álgebra de incidencia.

Definición 2.40. Dada una sucesión de números complejos $(a_n)_{n=0}^\infty$ podemos asociarle la serie formal

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

con la convención de que $x^0 = 1$.

Cabe aclarar que no siempre nos interesa tomar a F como función, nos interesa más considerar el álgebra de series formales. Definiremos un producto, suma y composición de series formales.

Definición 2.41. Dada la serie $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ asociada a $F(x)$ y la serie $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ asociada a $G(x)$ definimos

$$\begin{aligned}(F + G)(x) &:= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)x^n, \\(F * G)(x) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^n a_{n-m} b_m \right) x^n, \\(F \circ G)(x) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} a_r \left(\sum_{\substack{k_1, \dots, k_r \in [n]_0^r, \\ k_1 + \dots + k_r = n}} b_{k_1} \dots b_{k_r} \right) x^n.\end{aligned}$$

Si existen las correspondientes vecindades en \mathbb{C} en las que $F(x)$ y $G(x)$ son series absolutamente convergentes entonces la suma, producto y composición como series formales corresponden con su suma, producto y composición como funciones complejas.

Por ejemplo, podemos considerar la serie $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, con $a_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$, asociada a

$$F(x) = 1 + x + x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

que es la función $F(x) = \frac{1}{1-x}$ para $|x| < 1$. Podemos considerar la serie $(\frac{1}{n!})_{n=0}^{\infty}$ asociada a la función exponencial.

Ejemplo 2.42. Los números de Fibonacci se definen recursivamente tomando $F_0 := 0, F_1 := 1$ y para $n \geq 2$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},$$

de modo que la serie $F(x)$ asociada a $(F_n)_{n=0}^{\infty}$ cumple

$$xF(x) + F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (F_n + F_{n-1})x^n = \sum_{n=1}^{\infty} F_{n+1}x^n,$$

es decir

$$xF(x) + F(x) = \frac{1}{x}(F(x) - x).$$

Si suponemos temporalmente que existe una vecindad donde F es absolutamente convergente alrededor del 0 entonces se debe cumplir

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

Sean λ_1 y λ_2 las raíces de x^2+x-1 . Podemos resolver un sistema de ecuaciones para encontrar A y B tales que

$$F(x) = \frac{A}{1 - \lambda_1 x} + \frac{B}{1 - \lambda_2 x},$$

encontramos que $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $A = \lambda_1 - \lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ y $B = \lambda_2 - \lambda_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Se tiene

$$F(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{1 - \lambda_1 x} - \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{1 - \lambda_2 x},$$

por lo que tenemos

$$F_n = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\sqrt{5}}.$$

Tomando los números de Catalán de la Definición 2.27, podemos buscar cual es la función asociada a la serie $(C_n)_{n=0}^\infty$.

Teorema 2.43. *Sea*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n.$$

Se cumple

$$f(x) = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 4x}}.$$

Demostración. Notemos que

$$f(x)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^n C_m C_{n-m} \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1} x^n.$$

Multiplicamos ambos lados por x y luego sumamos $1 = C_0$ a ambos lados, para obtener

$$x f(x)^2 + 1 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = f(x),$$

de modo que se tiene

$$f(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x}}{2x}.$$

Multiplicando por el conjugado obtenemos

$$f(x) = \frac{4x}{2x(1 \pm \sqrt{1 - 4x})}.$$

Para $x \neq 0$ tenemos

$$f(x) = \frac{2}{1 \pm \sqrt{1 - 4x}}.$$

Como f es continua en 0 y $f(0) = 1$ tenemos que

$$f(x) = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 4x}}.$$

□

Finalmente, podemos considerar series formales multivariadas y de modo que las variables formales no conmutan entre sí. Al espacio de dichas series generado por r variables lo nombramos $\mathbb{C}[[z_1, \dots, z_r]]$. En este caso podemos tomar una función serie de funciones $A_n : \mathcal{A}^n \rightarrow \mathbb{C}$ y dado un $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_r) \in \mathcal{A}^r$. Tomemos $\vec{z} = (z_1, \dots, z_r)$, definimos las series:

$$A_X(\vec{z}) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i_1, \dots, i_n \in [r]} A_n(X_{i_1}, \dots, X_{i_n}) z_{i_1} \dots z_{i_n}.$$

2.4. Definiciones de Cumulantes

Ya que definimos las nociones de independencia en el capítulo anterior, nos interesa calcular los momentos mixtos de variables aleatorias para obtener relaciones entre ellas. Cuando se calculan los momentos mixtos de varios ordenes podemos darnos cuenta que las distintas nociones de independencia podemos definir las en otros términos. Ésto puede ayudarnos a corroborar con mayor facilidad si se tiene que dos o más álgebras son independientes.

Dado un EPNC (\mathcal{A}, ϕ) , definimos $M_n : \mathcal{A}^n \rightarrow \mathcal{C}$ como

$$M_n(X_1, \dots, X_n) := \phi(X_1 \cdots X_n), \quad \forall X_1, \dots, X_n \in \mathcal{A}.$$

Definición 2.44. Dada una serie de funciones $F_k : \mathcal{A}^k \rightarrow \mathbb{C}$ para $k \in \mathbb{N}$. Definiremos la extensión multiplicativa de F a las funciones F_π para $\pi \in P(n)$. Si $\pi = \{V_1, \dots, V_k\}$ con $V_j = \{m_{j,1}, \dots, m_{j,|V_j|}\}$ para $j = 1, \dots, k$, entonces

$$F_\pi(X_1, \dots, X_n) := \prod_{j=1}^k F_{|V_j|}(X_{m_{j,1}}, \dots, X_{m_{j,|V_j|}}), \quad \forall X_1, \dots, X_n \in \mathcal{A}.$$

Definiremos los cumulantes en términos de la fórmula cumulante momento. En realidad existen múltiples definiciones equivalentes. Utilizaremos esta definición recursiva pues es la más práctica para nuestros fines.

Existen cuatro tipos de cumulantes que son de interés para nosotros: clásicos, libres, booleanos y monótonos.

Para definir los cumulantes nos apoyaremos en los COPOS de particiones, para cumulantes clásicos utilizaremos el COPO $P(n)$ de la Definición 2.20.

Definición 2.45 (Cumulantes clásicos). Dado un EPNC (\mathcal{A}, ϕ) , los cumulantes clásicos son funcionales multilineales $K_n : \mathcal{A}^n \rightarrow \mathbb{C}$, que se definen recursivamente con la relación

$$K_n(X_1, \dots, X_n) := M_n(X_1, \dots, X_n) - \sum_{\pi \in P(n), \pi \neq \hat{1}_n} K_\pi(X_1, \dots, X_n).$$

Esto quiere decir que se cumple la relación cumulante-momento

$$M_n(X_1, \dots, X_n) = \sum_{\pi \in P(n)} K_\pi(X_1, \dots, X_n).$$

Notemos que en el caso de $n = 1$ se cumple $M_1(X) = K_1(X)$ para todo $X \in \mathcal{A}$. Luego tenemos que, dados $X, Y \in \mathcal{A}$, se obtiene

$$K_2(X, Y) = M_2(X, Y) - K_1(X)K_1(Y) = \phi(XY) - \phi(X)\phi(Y).$$

Los cumulantes clásicos en general se pueden utilizar para determinar si dos o más álgebras son independientes en el sentido clásico, como en la Definición 1.12.

Teorema 2.46. *Dado un EPNC (\mathcal{A}, ϕ) y una familia de subálgebras $(\mathcal{A}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, tenemos que la familia $(\mathcal{A}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ es independiente en el sentido clásico si y sólo si, para todo $n \in \mathbb{N}, n > 2$ se cumple*

$$K_n(X_1, \dots, X_n) = 0,$$

siempre que K_n está evaluada en elementos de $(\mathcal{A}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ donde aparece más de una sola álgebra. Es decir, los cumulantes mixtos se anulan.

Demostración. Supongamos que la familia $(\mathcal{A}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ es independiente en el sentido clásico y queremos probar que los cumulantes mixtos se anulan. Vamos a proceder inductivamente sobre $n \in \mathbb{N}$ con $n > 1$.

El caso $n = 2$ se obtiene recordando que $K_2(XY) = \phi(XY) - \phi(X)\phi(Y)$ y si X, Y pertenecen a dos álgebras distintas independientes en el sentido clásico, de la definición obtenemos $\phi(XY) = \phi(X)\phi(Y)$. Obtenemos $K_2(X, Y) = 0$.

Sean $n > 2$ y $X_1, \dots, X_n \in \cup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}_\lambda$ de modo que existen X_i y X_j en distintas álgebras para algún par $i, j \in \mathbb{N}$.

Consideremos la relación de equivalencia $i \sim j$ si X_i y X_j pertenecen a una misma álgebra. Con esto obtenemos una partición σ a partir de la relación \sim .

Notemos que si $\pi \in P(n)$ es una partición distinta de $\hat{1}$ y que relaciona a elementos de distintas álgebras, por hipótesis inductiva se tiene $K_\pi(X_1, \dots, X_n) = 0$. Por lo que es necesario que $\pi \leq \sigma$ si queremos que K_π no se anule. Si despejamos esto en la relación cumulante momento obtenemos

$$\begin{aligned} K_n(X_1, \dots, X_n) &= M_n(X_1, \dots, X_n) - \sum_{\pi \in P(n), \pi \neq \hat{1}} K_\pi(X_1, \dots, X_n) \\ &= M_n(X_1, \dots, X_n) - \sum_{\pi \in P(n), \pi \leq \sigma} K_\pi(X_1, \dots, X_n). \end{aligned}$$

Como podemos separar a σ en bloques V_1, \dots, V_k y ver a π como un elemento de $P(|V_1|) \cdots P(|V_k|)$, tenemos por la relación cumulante momento que

$$K_n(X_1, \dots, X_n) = M_n(X_1, \dots, X_n) - M_\sigma(X_1, \dots, X_n).$$

Como teníamos independencia de en el sentido clásico, entonces obtenemos $K_n(X_1, \dots, X_n) = 0$.

Ahora supongamos que los cumulantes mixtos se anulan. Sean $n > 2$ y $X_1, \dots, X_n \in \cup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}_\lambda$ de modo que existen X_i y X_j en distintas álgebras para algún par $i, j \in \mathbb{N}$. Consideremos la relación de equivalencia $i \sim j$ si X_i y X_j pertenecen a una misma álgebra. Con esto obtenemos una partición σ a partir de la relación \sim .

Notemos que si $\pi \in P(n)$ es una partición distinta de $\hat{1}$ y que relaciona a elementos de distintas álgebras, por hipótesis se tiene $K_\pi(X_1, \dots, X_n) = 0$. Por lo que es necesario que $\pi \leq \sigma$ si queremos que K_π no se anule. Si despejamos esto de nuevo en la relación cumulante momento obtenemos

$$\begin{aligned} M_n(X_1, \dots, X_n) &= \sum_{\pi \in P(n), \pi \leq \sigma} K_\pi(X_1, \dots, X_n) \\ &= M_\sigma(X_1, \dots, X_n). \end{aligned}$$

□

Ahora, sea $\pi \in P(n)$. Si $\pi = \{V_1, \dots, V_k\}$ con $V_j = \{m_{j,1}, \dots, m_{j,|V_j|}\}$. Sean $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{A}$, entonces la fórmula entre momentos y cumulantes clásicos

nos dice que

$$\begin{aligned} M_\pi(X_1, \dots, X_n) &= \prod_{j=1}^k M_{|V_j|}(X_{m_{j,1}}, \dots, X_{m_{j,|V_j|}}) \\ &= \prod_{j=1}^k \left(\sum_{\pi_j \in P(|V_j|)} K_{\pi_j}(X_{j,1}, \dots, X_{m_{j,|V_j|}}) \right). \end{aligned}$$

Como $[\hat{0}_n, \pi]$ es isomorfo a $P(|V_1|) \times \dots \times P(|V_k|)$ y extendimos multiplicativamente a K_n , entonces se verifica que

$$M_\pi(X_1, \dots, X_n) = \sum_{\sigma \in P(n), \sigma \leq \pi} K_\sigma(X_1, \dots, X_n).$$

Utilizando el principio de inversión de Möbius obtenemos

$$K_n(X_1, \dots, X_n) = \sum_{\pi \in P(n)} \mu_P(\hat{0}, \pi) M_\pi(X_1, \dots, X_n).$$

Para simplificar la notación, si $X \in \mathcal{A}$ y $F_n : \mathcal{A}^n \rightarrow \mathbb{C}$ es una serie de funciones, tomaremos $F_n(X) := F_n(X, \dots, X)$ y del mismo modo la extensión a particiones $F_\pi(X) := F_\pi(X, \dots, X)$.

Podemos asociar algunas funciones generadoras a una variable aleatoria clásica $X \in L^{-\infty}(\Omega, \mathbb{P})$, como la función generadora de momentos:

$$\mathbb{E}(e^{tX}) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n(X)}{n!} t^n = 1 + M_1(X)t + \frac{M_2(X)t^2}{2!} + \frac{M_3(X)t^3}{3!} + \dots$$

Ejemplo 2.47. Si X tiene distribución Normal estándar $N(0, 1)$ entonces

$$M_n(X) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } n=2m-1 \text{ para algún } m \in \mathbb{N}, \\ \frac{(2m)!}{2^m m!} & , \text{ si } n=2m \text{ para algún } m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

En este caso tenemos

$$\mathbb{E}(e^{tX}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{2^k k! (2k)!} (t)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{t^2}{2}\right)^k = e^{\frac{t^2}{2}}.$$

Podemos también definir los cumulantes clásicos univariados $K_n(X)$ como los coeficientes que aparecen en la función generadora de cumulantes. Esto es, los definimos como los coeficientes de la serie

$$\log(\mathbb{E}(e^{tX})) = \frac{K_1(X)}{1!} t + \frac{K_2(X)}{2!} t^2 + \frac{K_3(X)}{3!} t^3 + \dots$$

Siempre que $\log(\mathbb{E}(e^{tX}))$ esté bien definido.

Teorema 2.48. *Cuando la función generadora de cumulantes y la de momentos están bien definidas, la definición de los cumulantes clásicos univariados en términos de la relación cumulante-momento y la que está en términos de funciones generadoras coinciden.*

Demostración. Observemos que

$$\begin{aligned} \exp(G(t)) &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} (G(t))^m \\ &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\sum_{k=1}^{\infty} K_k(X) t^k \right)^m \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^n \frac{1}{m!} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_m \in [m], \\ i_1 + \dots + i_m = n}} \frac{K_{i_1}(X) \dots K_{i_m}(X)}{i_1! \dots i_m!} \right) t^n, \end{aligned}$$

Luego observemos que

$$\exp(G(t)) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{m=1}^n \sum_{i_1 + \dots + i_m = n} \frac{n! K_{i_1}(X) \dots K_{i_m}(X)}{m! i_1! \dots i_m!} \right) t^n.$$

Consideremos (i_1, \dots, i_m) naturales tales que $i_1 + \dots + i_m = n$, sea $\sigma \in S_n$. Definimos la serie de funciones

$$f_m(\sigma, (i_1, \dots, i_m)) := \pi = \{ \{ \sigma(1), \dots, \sigma(i_1) \}, \dots, \{ \sigma(i_{m-1} + 1), \dots, \sigma(i_m) \} \}.$$

Obtenemos que $\pi \in P(n)$ fija, tiene como preimagen $m! i_1! \dots i_m!$ elementos. Como $K_{i_1}(X) \dots K_{i_m}(X) = K_{\pi}(X)$, entonces podemos reordenar la suma como

$$\begin{aligned} \exp(G(t)) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{m=1}^n \sum_{i_1 + \dots + i_m = n} \sum_{\sigma \in S_n} \frac{K_{i_1}(X) \dots K_{i_m}(X)}{m! i_1! \dots i_m!} \right) t^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\sum_{\pi \in P(n)} K_{\pi}(X) \right] t^n. \end{aligned}$$

Entonces, la relación cumulante-momento nos dice que

$$\exp(G(t)) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n(X)}{n!} t^n = F(t),$$

si y sólo si, se cumple la definición en términos de funciones generadoras

$$\log(F(t)) = G(t).$$

□

Para nuestro ejemplo de variable aleatoria X con distribución Normal se cumple

$$G(t) = \log(F(t)) = \log(e^{\frac{t^2}{2}}) = \frac{t^2}{2},$$

por lo que los cumulantes clásicos de la distribución normal se anulan todos salvo $K_2(X) = 1$.

Ahora definiremos los cumulantes Booleanos y probaremos resultados similares a los anteriores. Los cumulantes booleanos se definen de manera análoga a los cumulantes clásicos, cambiando el COPO $P(n)$, por el COPO $I(n)$ de la Definición 2.22.

Definición 2.49 (Cumulantes booleanos). Dado un EPNC (\mathcal{A}, ϕ) , los cumulantes booleanos son funcionales multilineales $B_n : \mathcal{A}^n \rightarrow \mathbb{C}$, que se definen recursivamente con la relación

$$B_n(X_1, \dots, X_n) := M_n(X_1, \dots, X_n) - \sum_{\pi \in I(n), \pi \neq \hat{1}_n} B_\pi(X_1, \dots, X_n).$$

Esto quiere decir que se cumple la relación

$$M_n(X_1, \dots, X_n) = \sum_{\pi \in I(n)} B_\pi(X_1, \dots, X_n).$$

De manera semejante se tiene $B_1(X) = \phi(X)$ y $B_2(X, Y) = \phi(XY) - \phi(X)\phi(Y)$ pues $P(1) = I(1)$ y $P(2) = I(2)$.

Vamos a probar un teorema que relaciona los cumulantes booleanos con la independencia booleana de la Definición 1.16.

Teorema 2.50. *Dado un EPNC (\mathcal{A}, ϕ) y una familia de subálgebras $(\mathcal{A}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, tenemos que la familia $(\mathcal{A}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ es independiente en el sentido booleano si y sólo si, para todo $n \in \mathbb{N}, n > 2$ se cumple*

$$B_n(X_1, \dots, X_n) = 0,$$

siempre que B_n está evaluada en elementos de $(\mathcal{A}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ donde aparece más de una sola álgebra. Es decir, los cumulantes mixtos se anulan.

Demostración. Supongamos que los cumulantes booleanos mixtos se anulan y queremos probar que la familia $(\mathcal{A}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ es independiente en el sentido booleano.

Sea $\sigma : [n] \rightarrow \Lambda$ tal que $\sigma(i) \neq \sigma(i+1)$ para $i \in [n-1]$ y sean X_1, \dots, X_n tales que $X_i \in \mathcal{A}_{\sigma_i}$ para $i \in [n]$.

Sea $\pi \in I(n)$, como los cumulantes mixtos se anulan y cada dos elementos consecutivos en X_1, \dots, X_n son de distinta álgebra, tenemos que para que

$B_\pi(X_1, \dots, X_n)$ no se anule es necesario que $\pi = \hat{0}$. Por la fórmula cumulante momento obtenemos

$$\begin{aligned} M_n(X_1, \dots, X_n) &= \sum_{\pi \in I(n)} B_\pi(X_1, \dots, X_n) \\ &= B_{\hat{0}}(X_1, \dots, X_n) = \phi(X_1) \cdots \phi(X_n) \\ &= M_1(X_1) \cdots M_1(X_n). \end{aligned}$$

Ahora, supongamos que la familia $(\mathcal{A}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ es independiente en el sentido booleano. Sean $n > 2$ y $X_1, \dots, X_n \in \cup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}_\lambda$ de modo que existen X_i y X_j en distintas álgebras para algún par $i, j \in \mathbb{N}$. Vamos a proceder inductivamente sobre $n > 1$.

El caso $n = 2$ se obtiene recordando que $B_2(XY) = \phi(XY) - \phi(X)\phi(Y)$ y si X, Y pertenecen a dos álgebras distintas independientes en el sentido booleano, de la definición obtenemos $\phi(XY) = \phi(X)\phi(Y)$. Obtenemos $B_2(X, Y) = 0$.

Sean $1 \leq r_1 \leq \dots \leq r_k = n$ de modo que $X_1, \dots, X_{r_1} \in \mathcal{A}_{\lambda_1}, \dots, X_{r_{k-1}+1}, \dots, X_{r_k} \in \mathcal{A}_{\lambda_k}$ para $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_k$.

Sea $\sigma := \{\{1, 2, \dots, r_1\}, \dots, \{r_{k-1} + 1, \dots, r_k\}\} \in I(n)$ y $\pi \in I(n)$ con $\pi \neq \hat{1}_n$, como los cumulantes B_π con bloques mixtos se anulan para $\pi \neq \hat{1}$, tenemos que si se cumple $\pi \geq \sigma$ entonces B_π se anula. De la definición recursiva obtenemos

$$\begin{aligned} B_n(X_1, \dots, X_n) &= M_n(X_1, \dots, X_n) - \sum_{\pi \in I(n), \pi \leq \sigma} B_\pi(X_1, \dots, X_n) \\ &= M_n(X_1, \dots, X_n) - M_\sigma(X_1, \dots, X_n), \end{aligned}$$

de la independencia booleana de $(\mathcal{A}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ obtenemos que $B_n(X_1, \dots, X_n) = 0$ \square

De manera similar a con los cumulantes clásicos, sea $\pi \in I(n)$. Si $\pi = \{V_1, \dots, V_k\}$ con $V_j = \{m_{j,1}, \dots, m_{j,|V_j|}\}$. Sean $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{A}$, entonces, siguiendo la misma argumentación podemos llegar a que $[\hat{0}_n, \pi]$ es isomorfo a $I(|V_1|) \times \dots \times I(|V_k|)$ y por la multiplicatividad

$$M_\pi(X_1, \dots, X_n) = \sum_{\sigma \in I(n), \sigma \leq \pi} B_\sigma(X_1, \dots, X_n).$$

Podemos utilizar el principio de inversión de Möbius para obtener

$$B_n(X_1, \dots, X_n) = \sum_{\pi \in I(n)} \mu_I(\hat{0}, \pi) M_\pi(X_1, \dots, X_n).$$

Y como ya calculamos $\mu_I(0, \pi)$ anteriormente, tenemos

$$B_n(X_1, \dots, X_n) = \sum_{\pi \in I(n)} (-1)^{n-|\pi|} B_\pi(X_1, \dots, X_n).$$

Para los cumulantes booleanos, trabajaremos con la función generadora de cumulantes mixtos y no sólo con los univariados.

Definición 2.51. Dado un $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_r) \in \mathcal{A}^r$, tomemos $\vec{z} = (z_1, \dots, z_r)$. Definimos las series formales

$$M_{\mathbf{X}}(\vec{z}) := 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i_1, \dots, i_n \in [r]} M_n(X_{i_1}, \dots, X_{i_n}) z_{i_1} \dots z_{i_n},$$

$$B_{\mathbf{X}}(\vec{z}) := \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i_1, \dots, i_n \in [r]} B_n(X_{i_1}, \dots, X_{i_n}) z_{i_1} \dots z_{i_n},$$

Teorema 2.52. *Se cumple*

$$B_{\mathbf{X}}(\vec{z}) M_{\mathbf{X}}(\vec{z}) = M_{\mathbf{X}}(\vec{z}) - 1$$

Demostración. Vamos a ver coeficiente a coeficiente en ambos lados de la igualdad para demostrar que son iguales. Para esto, desarrollamos primero

$$B_{\mathbf{X}}(\vec{z}) M_{\mathbf{X}}(\vec{z}) = \left[\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{i_1, \dots, i_p \in [r]^p} B_p(X_{i_1}, \dots, X_{i_p}) z_{i_1} \dots z_{i_p} \right]$$

$$\times \left[1 + \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{j_1, \dots, j_q \in [r]^q} M_q(X_{j_1}, \dots, X_{j_q}) z_{j_1} \dots z_{j_q} \right].$$

El coeficiente de $z_{i_1} \dots z_{i_n}$ es:

$$B_n(X_{i_1}, \dots, X_{i_n}) + \sum_{p=1}^{n-1} B_p(X_{i_1}, \dots, X_{i_p}) M_{n-p}(X_{i_{p+1}}, \dots, X_{i_n}).$$

Utilizando la fórmula cumulante-momento tenemos que el coeficiente es

$$B_n(X_{i_1}, \dots, X_{i_n}) + \sum_{p=1}^{n-1} B_p(X_{i_1}, \dots, X_{i_p}) \sum_{\sigma \in I(n-p)} B_\sigma(X_{i_{p+1}}, \dots, X_{i_n})$$

$$= B_n(X_{i_1}, \dots, X_{i_n}) + \sum_{\sigma \in I(n), \sigma \neq \hat{1}} B_\sigma(X_{i_1}, \dots, X_{i_n}).$$

De nuevo por la fórmula cumulante-momento obtenemos que el coeficiente de $z_{i_1} \dots z_{i_n}$ es

$$M_n(X_{i_1}, \dots, X_{i_n}).$$

Comparando coeficiente por coeficiente concluimos la demostración del teorema. \square

Ahora obtendremos una relación semejante para la función generadora de cumulantes libres, pero para esto debemos definir primero una función más.

Definición 2.53. Dado un $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_r) \in \mathcal{A}^r$. Tomemos $\vec{z} = (z_1, \dots, z_r)$, definimos

$$\mathcal{M}_{\mathbf{X}}(\vec{z}) := (z_i M_{\mathbf{X}}(\vec{z}))_{i=1}^r = (z_1 M_{\mathbf{X}}(\vec{z}), \dots, z_r M_{\mathbf{X}}(\vec{z})).$$

Vamos a definir los cumulantes libres cambiando al COPO de la Definición 2.45, por el COPO de particiones que no se cruzan de la Definición 2.26.

Definición 2.54 (Cumulantes libres.). Dado un EPNC (\mathcal{A}, ϕ) , los cumulantes libres son funcionales multilineales $R_n : \mathcal{A}^n \rightarrow \mathbb{C}$, que se definen recursivamente con la relación

$$R_n(X_1, \dots, X_n) := M_n(X_1, \dots, X_n) - \sum_{\pi \in NC(n), \pi \neq \hat{1}_n} R_\pi(X_1, \dots, X_n).$$

Esto quiere decir que se cumple la relación

$$M_n(X_1, \dots, X_n) = \sum_{\pi \in NC(n)} R_\pi(X_1, \dots, X_n).$$

Tenemos también un teorema que relaciona los cumulantes libres con la independencia libre de la Definición 1.14.

Teorema 2.55. Dado un EPNC (\mathcal{A}, ϕ) y una familia de subálgebras $(\mathcal{A}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, tenemos que la familia $(\mathcal{A}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ es independiente en el sentido libre si y sólo si, para todo $n \in \mathbb{N}, n > 2$ se cumple

$$R_n(X_1, \dots, X_n) = 0,$$

siempre que R_n está evaluada en elementos de $(\mathcal{A}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ donde aparece más de una sola álgebra. Es decir, los cumulantes mixtos se anulan.

La demostración de este teorema es un poco extensa y requiere un par de resultados adicionales, por lo que no será incluida. La prueba puede encontrarse en el capítulo 11 de [1].

De manera similar a con los cumulantes clásicos y booleanos, sea $\pi \in NC(n)$. Si $\pi = \{V_1, \dots, V_k\}$ con $V_j = \{m_{j,1}, \dots, m_{j,|V_j|}\}$. Sean $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{A}$, entonces, siguiendo la misma argumentación podemos llegar a que $[\hat{0}_n, \pi]$ es isomorfo a $NC(|V_1|) \times \dots \times NC(|V_k|)$ y por la multiplicatividad

$$M_\pi(X_1, \dots, X_n) = \sum_{\sigma \in NC(n), \sigma \leq \pi} R_\sigma(X_1, \dots, X_n).$$

Podemos utilizar la fórmula de inversión de Möbius para obtener

$$R_n(X_1, \dots, X_n) = \sum_{\pi \in NC(n)} \mu_{NC}(\hat{0}, \pi) M_\pi(X_1, \dots, X_n).$$

Podemos definir también la función generadora asociada a los cumulantes libres multivariados.

Definición 2.56. Dado un $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_r) \in \mathcal{A}^r$, tomemos $\vec{z} = (z_1, \dots, z_r)$. Definimos la serie formal

$$R_{\mathbf{X}}(\vec{z}) := \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i_1, \dots, i_n \in [r]} R_n(X_{i_1}, \dots, X_{i_n}) z_{i_1} \dots z_{i_n}.$$

Ya tenemos las herramientas necesarias para ver la relación entre la serie asociada a los momentos y la serie asociada a los cumulantes libres.

Teorema 2.57. *Se cumple*

$$R_{\mathbf{X}}(\mathcal{M}_{\mathbf{X}}(\vec{z})) = M_{\mathbf{X}}(\vec{z}) - 1.$$

Demostración. La prueba sigue el mismo procedimiento que la prueba del teorema anterior. Vamos a comparar coeficiente por coeficiente en

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{X}}(\mathcal{M}_{\mathbf{X}}(\vec{z})) &= R_{\mathbf{X}}(z_1 M_{\mathbf{x}}(\vec{z}), \dots, z_r M_{\mathbf{x}}(\vec{z})) \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{i_1, \dots, i_p \in [r]^p} R_{\mathbf{X}}(X_{j_1}, \dots, X_{j_p}) z_{j_1} M_{\mathbf{X}}(\vec{z}) \dots z_{j_p} M_{\mathbf{X}}(\vec{z}). \end{aligned}$$

Si nos interesa el coeficiente de $z_{i_1} \dots z_{i_n}$, tenemos que es

$$R_n(X_{i_1}, \dots, X_{i_n})$$

$$+ \sum_{\substack{p=1, \\ 1=j_1 < \dots < j_p < j_{p+1}=n}}^{n-1} R_p(X_{i_{j_1}}, \dots, X_{i_{j_p}}) \phi(X_{i_{j_{p+1}}} \cdots X_{i_{j_{2p-1}}}) \cdots \phi(X_{i_{j_{p+1}}} \cdots X_{i_n})$$

(cambiamos la notación M_k por ϕ para que la fórmula fuera un poco más corta).

Utilizando la fórmula cumulantes libres-momentos obtenemos que el coeficiente es

$$R_n(X_{i_1}, \dots, X_{i_n}) + \sum_{\sigma \in NC(n), \sigma \neq \hat{1}} R_\sigma(X_{i_1}, \dots, X_{i_n}).$$

Se concluye nuestra demostración utilizando de nuevo la fórmula cumulantes libres-momentos. \square

Por último vamos a definir los cumulantes monótonos, utilizaremos las particiones ordenadas de la Definición 2.36.

Definición 2.58 (Cumulantes Monótonos.). Dado un EPNC (\mathcal{A}, ϕ) , los cumulantes monótonos $H_n : \mathcal{A}^n \rightarrow \mathbb{C}$ son funciones multilineales de que se definen recursivamente con la relación

$$H_n(X_1, \dots, X_n) := M_n(X_1, \dots, X_n) - \sum_{(\pi, \lambda) \in \mathcal{M}(n), \pi \neq \hat{1}_n} \frac{1}{|\pi|!} H_\pi(X_1, \dots, X_n).$$

Esto quiere decir que se cumple la relación cumulante-momento monótono

$$M_n(X_1, \dots, X_n) = \sum_{(\pi, \lambda) \in \mathcal{M}(n)} \frac{1}{|\pi|!} H_\pi(X_1, \dots, X_n).$$

Utilizando el Lema 2.39 podemos reescribir la fórmula anterior en

$$M_n(X_1, \dots, X_n) = \sum_{\pi \in NC(n)} \frac{1}{\tau(\pi)!} H_\pi(X_1, \dots, X_n).$$

No es cierto que la independencia en el sentido monótono es equivalente a que los cumulantes mixtos se anulen, pues eso significaría que si \mathcal{A}_1 es independiente en el sentido monótono de \mathcal{A}_2 entonces debería ser cierto que \mathcal{A}_2 es independiente en el sentido monótono de \mathcal{A}_1 , lo cual es falso. Tampoco es conocida la fórmula de inversión de H_n en términos de M_π .

Para finalizar el capítulo, definimos también la función generadora asociada a los cumulantes monótonos.

Definición 2.59. Dado un $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_r) \in \mathcal{A}^r$. Tomemos $\vec{z} = (z_1, \dots, z_r)$, definimos la serie formal

$$H_X(\vec{z}) := \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i_1, \dots, i_n \in [r]} H_n(X_{i_1}, \dots, X_{i_n}) z_{i_1} \dots z_{i_n}.$$

Los resultados para esta función generadora se presentarán en la Sección 2 del Capítulo 4.

Capítulo 3

Polinomios en gráficas

Cuando la teoría de gráficas aún no estaba muy desarrollada, William Thomas Tutte trabajó con propiedades de gráficas que cumplen recursiones contrayendo y eliminando aristas, funciones que definiremos, como la cantidad de t -coloraciones de una gráfica o la cantidad de orientaciones acíclicas de una gráfica. Tutte descubrió que dichas propiedades podían verse como la evaluación de un polinomio. Hoy en día a tal polinomio se le conoce como el polinomio de Tutte en su honor.

El trabajo de Tutte incluye una estructura un poco más general. En su tesis doctoral aparece la versión del polinomio de Tutte para matroides. Las matroides son una generalización de la estructura de espacio vectorial.

Podemos obtener una estructura de matroide a partir de una gráfica dada. En general las matroides pueden utilizarse para modelar colecciones de objetos finitos en los cuales aparece una propiedad de sustitución, como es la sustitución de un elemento en el cambio de base de un espacio vectorial finitamente generado o la sustitución de una arista en un árbol generador de una gráfica dada.

Vamos a estudiar matroides para comprender la estructura subyacente al polinomio de Tutte. En capítulos posteriores lo utilizaremos para calcular la relación entre cumulantes clásicos y cumulantes libres, así como entre cumulantes clásicos y cumulantes booleanos. Intentaremos utilizarlo también al calcular los coeficientes de la relación entre cumulantes clásicos y monótonos.

La Sección 3.1 de este capítulo, que habla sobre el polinomio cromático, está basada en la Sección 9.1 de [4]. Las Secciones 3.2 y 3.3 están basadas en las definiciones y ejemplos de [3].

3.1. Polinomio cromático

Para comprender mejor al polinomio de Tutte, estudiaremos primero una de sus evaluaciones.

Para nuestros fines, una gráfica es un par $G = (V, E)$, donde V es un conjunto finito y E es un multiconjunto de pares no ordenados de V .

Notemos que en nuestra definición de gráfica admitimos aristas de la forma $\{v, v\} \in E$, que son conocidas como lazos. Admitimos también múltiples instancias de una misma arista en E .

Definición 3.1. Sea $G = (V, E)$ una gráfica, el polinomio cromático de G se define como

$$x(G, t) := \#t\text{-coloraciones de } G,$$

dónde una t -coloración es una función $c : V \rightarrow \{1, 2, \dots, t\}$, tal que $c(u) \neq c(v)$ si $\{u, v\} \in E$.

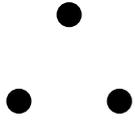
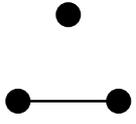
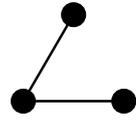
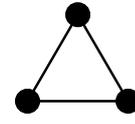
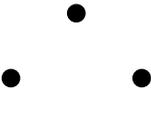
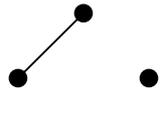
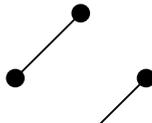
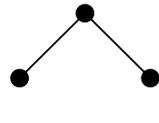
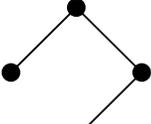
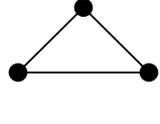
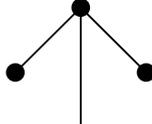
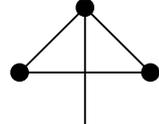
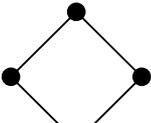
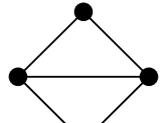
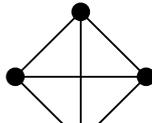
A priori, no es claro por qué $x(G, t)$ es un polinomio siempre, pero lo vamos a demostrar posteriormente, utilizando varias de las propiedades recursivas de $x(G, t)$.

Notemos que si $G = (V, E)$ contiene un lazo, entonces su polinomio cromático es 0.

Notemos que tener más de una instancia de una misma arista en nuestra gráfica no cambia el polinomio a sólo tener una copia de ella, por lo que si hay múltiples copias de una arista las borraremos al calcular su polinomio cromático.

La razón por la que tomamos en cuenta aristas múltiples y lazos es porque, cuando calculemos el polinomio cromático como evaluación del polinomio de Tutte, aparecerán de nuevo ambos objetos y será necesario tomarlos en cuenta.

Ejemplo 3.2. Primero, vamos a calcular el polinomio cromático utilizando métodos básicos de conteo para todas las gráficas no isomorfas en 3 y 4 vértices:

| | | | |
|---|--|--|--|
|  t^3 |  $t^2(t-1)$ |  $t(t-1)^2$ |  $t(t-1)(t-2)$ |
|  t^4 |  $t^3(t-1)$ |  $t^2(t-1)^2$ |  $t^2(t-1)(t-2)$ |
|  $t(t-1)^3$ |  $t^2(t-1)(t-2)$ |  $t(t-1)^3$ |  $t(t-1)^2(t-2)$ |
|  $t(t-1)(t^2-3t+3)$ |  $t(t-1)(t-2)^2$ |  $t(t-1)(t-2)(t-3)$ | |

Notemos que si tenemos una gráfica con $k \in \mathbb{N}$ componentes conexas G_1, G_2, \dots, G_k , entonces por principio de conteo multiplicativo, tenemos que $x(G, t) = x(G_1, t) \cdots x(G_k, t)$. Por esta razón calcularemos principalmente polinomios cromáticos para gráficas conexas.

1. El polinomio cromático de la gráfica completa K_n es

$$x(K_n, t) = t(t-1) \cdots (t-n+1).$$

2. En un árbol T con $n \in \mathbb{N}$ vértices, el polinomio cromático se puede calcular inductivamente. Si coloreamos un vértice de grado 1 del árbol tenemos t opciones, para el siguiente vértice adyacente tenemos $(t-1)$ y coloreamos sucesivamente, hasta llegar a otro vértice de grado 1. Después repetimos el proceso conectando cualquier otro vértice a nuestra componente mediante una trayectoria, sólo hay una manera de hacer ésto en un árbol, por lo que agregamos la trayectoria tomando los vértices en orden de la componente al nuevo vértice y multiplicamos

por $(t-1)$ cada que agregamos un vértice a la componente. Deducimos que el polinomio cromático de T es

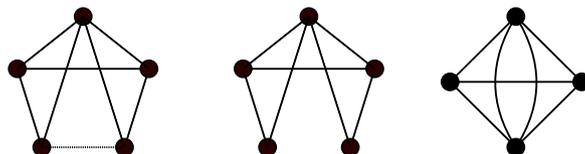
$$x(T, t) = t(t-1)^{n-1}.$$

Vamos a calcular el polinomio cromático de cualquier gráfica dada, utilizando recursión sobre las aristas. Definiremos dos tipos de gráficas que se obtienen al intentar eliminar una arista en una gráfica dada.

Definición 3.3. Sea $G = (V, E)$ una gráfica, tomemos un $e \in E$ fijo, definimos

1. La gráfica $G \setminus e$ es la gráfica con conjunto de vértices V y aristas $E \setminus e$. Cuando tomamos $G \setminus e$ decimos que borramos e de G .
2. La gráfica G/e es la gráfica tal que, si $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ y e tiene extremos v_i y v_j , entonces el conjunto de vértices de G/e es $(\{v_1, \dots, v_n\} \setminus \{v_i, v_j\}) \cup \{(v_{i,j})\}$ y aristas E/e obtenidas a partir de tomar aristas de $E \setminus \{e\}$ y cambiar las instancias de v_i y v_j por el vértice $v_{i,j}$. Cuando tomamos la gráfica G/e decimos que contraemos a e .

El siguiente diagrama muestra una gráfica G , donde tomamos un arista $e \in E$ marcada con líneas punteadas, dibujamos la gráfica asociada al borrado y contracción de e .



Proposición 3.4. Sea $G = (V, E)$ una gráfica, sea $e = \{u, v\} \in E$ una arista que no es un lazo en G , entonces se tiene

$$x(G, t) = x(G \setminus e, t) - x(G/e, t).$$

Demostración. Las t -coloraciones de $G \setminus e$ tales que $c(u) \neq c(v)$ tienen una biyección con las t -coloraciones de G . Hay que restar a las t -coloraciones de $G \setminus e$ las que cumplen $G \setminus e$ con $c(u) = c(v)$, dichas coloraciones tienen una biyección con las t -coloraciones de G/e que es asignar el mismo color a los vértices que no contraemos y el color $c(u) = c(v)$ al vértice obtenido con la contracción. \square

Definición 3.5. Sea $G = (V, E)$ una gráfica. Decimos que $e = \{u, v\} \in E$ es un puente si $G_1 = (V, E \setminus \{e\})$ tiene una componente conexas más que G .

Si la gráfica $G = (V, E)$ contiene un puente $e = \{u, v\} \in E$, entonces su polinomio cromático es el producto del polinomio cromático de las componentes conexas G_1 y G_2 obtenidas al borrarlo, restando las coloraciones en las que u y v tienen el mismo color. Si fijamos una coloración para G_1 , entonces $\frac{x(G_2, t)}{t}$ serán las coloraciones en las que u y v coinciden. Tenemos que

$$x(G, t) = x(G_1, t)x(G_2, t) - \frac{x(G_1, t)x(G_2, t)}{t},$$

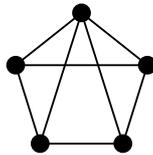
$$x(G, t) = \frac{(t-1)}{t}x(G_1, t)x(G_2, t) = \frac{t-1}{t}x(G \setminus e, t).$$

Notemos que $x(G/e, t) = \frac{x(G_1, t)x(G_2, t)}{t}$, pues de nuevo podemos dar una biyección entre las coloraciones de G/e y las de G_1 y G_2 con u y v del mismo color, entonces se sigue que

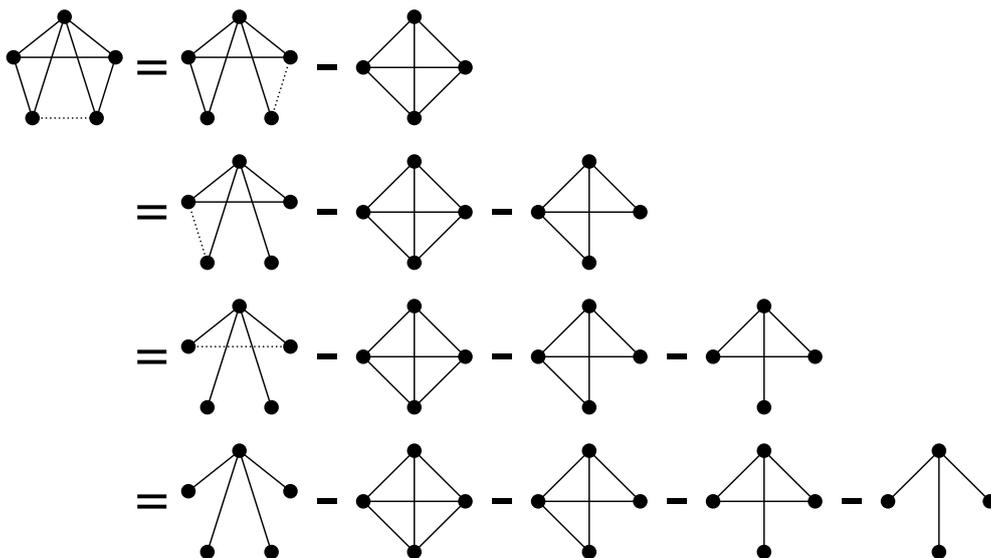
$$x(G, t) = (t-1)x(G/e, t).$$

Los anteriores cálculos serán de utilidad a la hora de escribir al polinomio cromático en términos del polinomio de Tutte.

Ejemplo 3.6. Utilizemos las propiedades recursivas para calcular un polinomio cromático. Consideremos la gráfica



Representaremos primero los polinomios con dibujos, la arista a contraer o borrar se marca con una línea punteada:



Como ya calculamos el polinomio cromático para todas las gráficas a la derecha de la igualdad, podemos calcular el polinomio cromático de G como

$$\begin{aligned}
x(G, t) &= t(t-1)^4 - t(t-1)(t-2)(t-3) - t(t-1)(t-2)^2 \\
&\quad - t(t-1)^2(t-2) - t(t-1)^3 \\
&= t(t-1)[(t-1)^3 - (t-2)(t-3) - (t-2)^2 - (t-1)(t-2) - (t-1)^2] \\
&= t(t-1)[(t-1)^3 - (t-1)^2 - (t-2)(t-3 + t-2 + t-1)] \\
&= t(t-1)(t-2)[(t-1)^2 - (3t-6)] \\
&= t(t-1)(t-2)(t^2 - 5t + 7).
\end{aligned}$$

Utilizando este procedimiento, inductivamente sobre la cantidad de vértices y aristas, podemos calcular el polinomio cromático para cualquier gráfica G dada. Se obtiene que $x(G, \lambda)$ es un polinomio siempre. El polinomio no depende del orden en el que elegimos los vértices pues la cantidad de t -coloraciones de una gráfica es una función bien definida y no es posible que dos polinomios distintos coincidan en una cantidad infinita de puntos.

3.2. Matroides

Las matroides pueden verse como una generalización de la estructura de espacio vectorial, así que vamos a comenzar con la definición de matroides con propiedades similares a las que tienen los conjuntos linealmente independientes de un espacio vectorial.

Definición 3.7. Una matroide M es un par (E, \mathcal{I}) donde E es un conjunto finito y \mathcal{I} es una colección de subconjuntos de E que satisface las tres propiedades:

- Se tiene que $\emptyset \in \mathcal{I}$.
- Si tenemos $X \in \mathcal{I}$ y $Y \subseteq X$ entonces tenemos $Y \in \mathcal{I}$.
- Si tenemos un par $U, V \in \mathcal{I}$ tal que $|U| = |V| + 1$, entonces existe $x \in U \setminus V$ tal que $V \cup \{x\} \in \mathcal{I}$.

Ejemplo 3.8. Sea $E \subset V$ un subconjunto finito de un espacio vectorial. Sea \mathcal{I} la colección de subconjuntos de E que contienen vectores linealmente independientes.

Se cumple $\emptyset \in \mathcal{I}$. Un subconjunto de un conjunto linealmente independiente es linealmente independiente. Si tenemos $U, V \in \mathcal{I}$ y $|U| = |V| + 1$ entonces, es conocido por álgebra lineal que debe existir $x \in U \setminus V$ tal que $V \cup \{x\}$ es linealmente independiente, por lo que se cumplen las tres propiedades y (E, \mathcal{I}) es una matroide.

Procederemos a definir el conjunto de bases de una matroide, generalizando la noción de base espacios vectoriales.

Definición 3.9. Dada una matroide (E, \mathcal{I}) , el conjunto de bases \mathcal{B} de la matroide se define como la colección de elementos de \mathcal{I} con cardinalidad maximal.

En nuestro ejemplo anterior, el conjunto de bases de nuestra matroide y el conjunto de bases del espacio vectorial, contenidas en E , coinciden.

También podemos definir la función de rango de una matroide, generalizando la noción de dimensión.

Definición 3.10. La función de rango de una matroide $\rho : 2^E \rightarrow \mathbf{Z}$ se define como

$$\rho(A) := \max(|X| : X \in \mathcal{I} \wedge X \subseteq A).$$

El rango de la matroide M es $\rho(M) := \rho(E)$.

Para nuestro ejemplo de espacios vectoriales, el rango de un conjunto de vectores y la dimensión de su espacio generado coinciden.

Continuando con la analogía, si $\rho(A \cup \{x\}) = \rho(A)$, decimos que x depende de A .

Definición 3.11. Dada una matroide (E, \mathcal{I}) , definimos el operador cerradura $\sigma : 2^E \rightarrow 2^E$ como

$$\sigma(A) = \{x \in S : x \text{ depende de } A\}.$$

Decimos que $A \subseteq E$ es cerrado o plano si $\sigma(A) = A$.

Un circuito es un conjunto $A \subseteq S$ tal que $A \notin \mathcal{I}$ y cumple $A \setminus \{x\} \in \mathcal{I}$ para todo $x \in A$.

Ya que existen varias definiciones equivalentes para matroides, es bueno conocer algunas que utilizaremos después para demostrar que un objeto que nos interesa es una matroide.

Teorema 3.12 (Axiomas de base).

Una colección no vacía \mathcal{B} de subconjuntos de S es el conjunto de bases de una matroide en S si y sólo si:

$$\text{Si } B_1, B_2 \in \mathcal{B} \text{ y } x \in B_1 \setminus B_2 \text{ entonces existe un } y \in B_2 \setminus B_1 \text{ tal que } (B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}.$$

Demostración. Primero, si tenemos el conjunto de bases de una matroide \mathcal{B} y B_1, B_2, x como en el teorema, tenemos que $B_1 \setminus \{x\}, B_2 \in \mathcal{S}$ así que aplicando el tercer axioma de matroide obtenemos el $y \in S$ del teorema.

Ahora supongamos que \mathcal{B} es como en el teorema. Vamos a definir una matroide M en S con $\mathcal{S} = \{A \subseteq S : A \subseteq B \text{ para algún } B \in \mathcal{B}\}$.

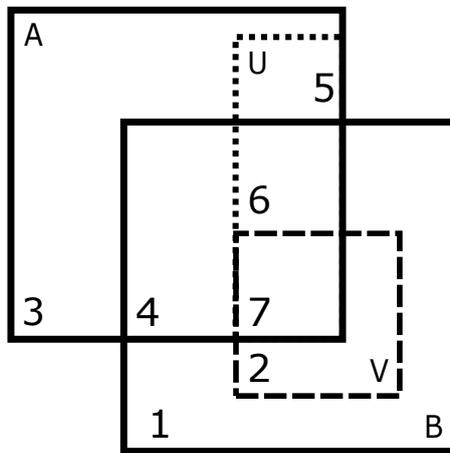
Probemos primero que todos los elementos de \mathcal{B} tienen la misma cardinalidad. Supongamos que tenemos $A, B \in \mathcal{B}$ tales que $|A| < |B|$. Utilicemos el axioma de sustitución elemento por elemento de $A \setminus B$, obtendremos un elemento $C \in \mathcal{B}$ tal que $|C| = |A| < |B|$ y $C \subseteq B$. Pero si ahora intentamos usar el axioma de sustitución para un elemento de $B \setminus C$ llegamos a una contradicción. Tenemos entonces que no puede existir tal par A, B .

Ahora vamos a probar que (S, \mathcal{S}) es una matroide. Es claro que se cumple que $\emptyset \in \mathcal{S}$.

Se cumple que si tenemos $V \in \mathcal{S}$ y $U \subseteq V$ entonces existe $B \in \mathcal{B}$ con $V \subseteq B$ por lo que $U \subseteq V \subseteq B$ y tenemos $U \in \mathcal{B}$.

Sea $U, V \in \mathcal{S}$ tales que $|V| = |U| + 1$. Sean $A, B \in \mathcal{B}$ tales que $U \subseteq A$ y $V \subseteq B$.

Si existe un $x \in (A \cap V) \setminus U$ tendríamos $U \cup \{x\} \in \mathcal{I}$, así que supondremos que no existe dicho elemento. El siguiente diagrama de Venn muestra todas las posibles combinaciones de intersecciones de nuestros conjuntos y las divide en regiones disjuntas



Si utilizamos el axioma de sustitución con $A \setminus (B \cup U)$ y B , y sustutimos un elemento de $A \setminus (B \cup U)$ de modo que la sustitución nos ofrece un elemento $y \in V \setminus A$, entonces de nuevo tenemos un $y \in V \setminus U$ con $U \cup \{y\} \in \mathcal{S}$. Supongamos que eso no sucede al utilizar el axioma de sustitución, de modo que lo utilizaríamos inductivamente hasta obtener un $\hat{A} \in \mathcal{B}$ tal que $\hat{A} \setminus (B \cup$

$U) = \emptyset$. Con esto tenemos que $|\hat{A}| = |U| + |(\hat{A} \cap B) \setminus U|$ pero

$$|B| \geq |(\hat{A} \cap B) \setminus U| + |V| > |(\hat{A} \cap B) \setminus U| + |U| = |\hat{A}|,$$

lo cual es una contradicción pues acabamos de demostrar que todos los elementos de \mathcal{B} tienen la misma cardinalidad. \square

Teorema 3.13 (Axiomas de rango).

Una función $\rho : 2^S \rightarrow \mathbf{Z}$ es la función de rango de una matroide en S si y sólo si cumple las siguientes tres propiedades

- $0 \leq \rho(X) \leq |X|, \forall X \subseteq S$.
- $X \subseteq Y \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y), \forall X, Y \subseteq S$.
- $\rho(X \cup Y) + \rho(X \cap Y) \leq \rho(X) + \rho(Y), \forall X, Y \subseteq S$.

Demostración. Primero probaremos que si tenemos una matroide (S, \mathcal{I}) y ρ es su función de rango, entonces cumple los tres axiomas de rango.

Si tenemos un $X \subseteq S$ entonces $\rho(X) = |I|$ par algún $I \subseteq X$ por lo que $0 \leq \rho(X) \leq |X|$.

Si tenemos un par de conjuntos X, Y tales que $Y \subseteq X \subseteq S$ entonces $\rho(Y) = |I|$ par algún $I \subseteq X$ y $I \in \mathcal{I}$, por lo que $\rho(X) \geq |I|$ y entonces $\rho(X) \geq \rho(Y)$.

Sean $X, Y \subseteq S$, sea I_1 un independiente maximal en $X \cup Y$ y sea I_2 un independiente maximal en $X \cap Y$. Si $|I_2| < |I_1|$ utilizaremos el tercer axioma de matroides, múltiples veces, hasta obtener un $I_3 \in \mathcal{I}$ tal que se cumple $I_2 \subseteq I_3 \subseteq X \cup Y$ y $|I_3| = |I_1|$. Tenemos que $\rho(X \cup Y) = |I_3|$, $\rho(X \cap Y) = |I_2|$, $\rho(X) \geq |I_3 \cap X|$ y $\rho(Y) \geq |I_3 \cap Y|$. Obtenemos que

$$\rho(X) + \rho(Y) \geq |X \cap I_3| + |Y \cap I_3| \geq |(X \cup Y) \cap I_3| + |X \cap Y \cap I_4|,$$

como $(X \cup Y) \cap I_3 = I_3$ y $I_2 \subseteq X \cap Y \cap I_3$ tenemos que

$$\rho(X) + \rho(Y) \geq |I_3 \cap X| + |I_3 \cap Y| = |I_3| + |I_3 \cap X \cap Y| \geq \rho(X \cup Y) + \rho(X \cap Y).$$

Supongamos que ρ es una función que cumple los axiomas de rango. Definamos $\mathcal{I} := \{I \subseteq S | \rho(I) = |I|\}$. Vamos a probar que (S, \mathcal{I}) es una matroide.

Tenemos que $0 \leq \rho(\emptyset) \leq |\emptyset| = 0$, por lo que $\rho(\emptyset) = 0$ y entonces $\emptyset \in \mathcal{I}$.

Si tenemos dos conjuntos X, Y , con $X \subseteq Y$ y $Y \in \mathcal{I}$, entonces utilizaremos el tercer axioma de rango con X y $Y \setminus X$. Obtenemos

$$\rho(Y) + \rho(\emptyset) \leq \rho(X) + \rho(Y \setminus X),$$

$$|Y| \leq \rho(X) + \rho(Y \setminus X) \leq |X| + |Y \setminus X| = |Y|.$$

Lo anterior nos dice que $\rho(X) = |X|$, por lo que se cumple $X \in \mathcal{I}$.

Por último sean $U, V \in \mathcal{I}$ con $|V| = |U| + 1$. Consideremos $V \setminus U = \{x_1, \dots, x_n\}$. Aplicando el tercer axioma con $U \cup \{x_1\}$ y $U \cup \{x_2\}$ obtenemos

$$\rho(U \cup \{x_1\}) + \rho(U \cup \{x_2\}) \geq \rho(U) + \rho(U \cup \{x_1, x_2\}).$$

Si sumamos $\rho(U \cup \{x_3\})$ a ambos lados y utilizamos el tercer axioma de rango con $U \cup \{x_1, x_2\}$ y $U \cup \{x_3\}$ obtenemos

$$\begin{aligned} \rho(U \cup \{x_1\}) + \rho(U \cup \{x_2\}) + \rho(U \cup \{x_3\}) &\geq \rho(U) + \rho(U \cup \{x_1, x_2\}) + \rho(U \cup \{x_3\}) \\ &\geq \rho(U) + \rho(U) + \rho(U \cup \{x_1, x_2, x_3\}). \end{aligned}$$

Inductivamente obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \rho(U \cup \{x_j\}) &\geq (n-1)\rho(U) + \rho(U \cup \{x_1, \dots, x_n\}) \\ &\geq (n-1)|U| + \rho(U \cup \{x_1, \dots, x_n\}). \end{aligned}$$

Como es cierto que $U \cup \{x_1, \dots, x_n\} = U \cup V$, se tiene que $\rho(U \cup \{x_1, \dots, x_n\}) \geq \rho(V) = |U| + |1|$, por lo que se tiene

$$\sum_{j=1}^n \rho(U \cup \{x_j\}) \geq n|U| + 1.$$

Por principio de casillas tenemos que existe un $j \in [n]$ tal que $\rho(U \cup \{x_j\}) \geq |U| + 1$ y entonces tenemos que $U \cup \{x_j\} \in \mathcal{I}$. \square

Ahora que hemos estudiado aspectos básicos y definiciones en matroides, veremos algunos ejemplos importantes.

Ejemplo 3.14 (Matroide uniforme). Dados n, k naturales, la matroide uniforme $U_{k,n}$ se define con $S = [n]$ y

$$\mathcal{I} = \{A \subseteq [n] : |A| \leq k\}.$$

El primer axioma se cumple pues $|\emptyset| = 0 \leq k$ para todo natural k . El segundo axioma porque si $A \subseteq B$ entonces $|A| \leq |B|$ por lo que si B es independiente entonces A también lo es. El tercer axioma se cumple pues si A, B son independientes y $|A| < |B|$ entonces existe $x \in B$ tal que $x \notin A$ y $A \cup \{x\}$ es independiente.

Podemos ver de las definiciones anteriores que se cumple lo siguiente

$$\mathcal{B} = \{B \subseteq [n] : |B| = k\},$$

$$\rho(A) = \begin{cases} |A| & \text{si } |A| < k; \\ k & \text{si } |A| \geq k, \end{cases}$$

$$\sigma(A) = \begin{cases} A & \text{si } |A| < k; \\ [n] & \text{si } |A| \geq k. \end{cases}$$

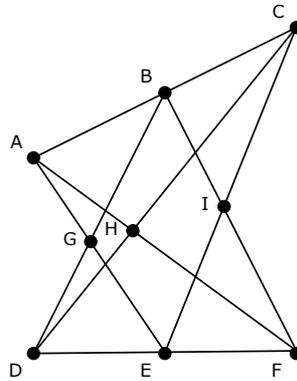
Los conjuntos cerrados en M son aquellos tales que $A \subseteq S$ con $|A| < k$ y S .

Para matroides también tenemos la noción de isomorfismo.

Definición 3.15. Sean (E_1, \mathcal{I}_1) y (E_2, \mathcal{I}_2) dos matroides, decimos que son isomorfas si existe una función biyectiva $f : E_1 \rightarrow E_2$ tal que $A \in \mathcal{I}_1$ si y sólo si $f(A) \in \mathcal{I}_2$ para todo $A \subseteq E_1$.

Decimos que una matroide (E, \mathcal{I}) es vectorial si es isomorfa a una matroide definida como en el Ejemplo 3.8. No todas las matroides son vectoriales, vamos a probar ésto con un ejemplo.

Ejemplo 3.16. Sea $S = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I\}$ y definiremos $\rho : 2^S \rightarrow \mathbf{Z}$ apoyándonos en el siguiente diagrama



$$\rho(X) = \begin{cases} |X|, & \text{si } |X| \leq 2; \\ 2, & \text{si } X \text{ es tres puntos que forman una de las líneas;} \\ 3, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Vamos a probar que ρ cumple los axiomas de rango.

Para el primer axioma, notemos que en los tres casos se cumple $0 \leq \rho(X) \leq |X|$ para todo $X \subseteq S$.

Para el segundo axioma, sean $X, Y \subseteq S$ con $X \subseteq Y$. Se puede verificar de manera inmediata que se cumple $\rho(Y) \geq \rho(X)$, tomando caso por caso para $|X| = 0, 1, 2$, $\rho(X) = 2$ con $|X| = 3$ y $\rho(X) = 3$.

Sean $X, Y \subseteq S$, vamos a proceder a demostrar el tercer axioma caso por caso para los posibles valores de $\rho(X)$ y $\rho(Y)$. Como los casos son simétricos, sólo probaremos los casos con $\rho(X) \geq \rho(Y)$.

- Si tenemos $\rho(X) = 3$ entonces $\rho(X \cup Y) = 3$. Como $\rho(Y) \geq \rho(X \cap Y)$, tenemos que $\rho(X) + \rho(Y) \geq \rho(X \cup Y) + \rho(X \cap Y)$.
- Si tenemos $\rho(Y) = 0$ entonces $Y = \emptyset$ por lo que $X \cap Y = \emptyset$ y $X \cup Y = X$ y se verifica que $\rho(X) + \rho(Y) \geq \rho(X \cup Y) + \rho(X \cap Y)$.
- Si tenemos $\rho(X) = 1$ y $\rho(Y) = 1$ entonces tenemos que $|X| = |Y| = 1$. Si tenemos $\rho(X \cup Y) = 2$, entonces $X \neq Y$, en tal caso tenemos $X \cap Y = \emptyset$. Si tenemos $\rho(X \cup Y) = 1$, entonces tenemos $X = Y$, en tal caso se tiene $\rho(X \cap Y) = 1$. En ambos casos tenemos $\rho(X) + \rho(Y) \geq \rho(X \cup Y) + \rho(X \cap Y)$.
- Si tenemos $\rho(X) = 2$ y $\rho(Y) = 1$, se cumple $|Y| = 1$. Si tenemos $Y \subseteq X$, tenemos que $X \cup Y = X$ y $X \cap Y = Y$, por lo que se cumple el tercer axioma. Si $Y \not\subseteq X$ tenemos $X \cap Y = \emptyset$ y entonces $\rho(X) + \rho(Y) = 3 \geq \rho(X \cup Y) + \rho(X \cap Y)$.
- Por último, si $\rho(X) = \rho(Y) = 2$ tenemos que, para que no se cumpla el tercer axioma, se debe cumplir que $\rho(X \cup Y) = 3$ y $\rho(X \cap Y) = 2$. Ya que tenemos $|X \cap Y| \geq 2$, tomemos dos puntos distintos $p_1, p_2 \in X \cap Y$. Tenemos que debe existir un punto p_3 en X o en Y tal que p_1, p_2, p_3 no formen una línea, pues de lo contrario $\rho(X \cup Y) \leq 2$. Tendríamos que X o Y contienen tres puntos que no forman una línea, lo que es una contradicción con $\rho(X) = \rho(Y) = 2$.

En todos los casos se cumple el tercer axioma de rango, por lo que ρ es en efecto la función de rango de una matroide.

La matroide definida no es vectorial pues no cumple el teorema de Pappus, que es un conocido teorema de geometría proyectiva que nos pediría que $\rho(\{G, H, I\}) = 2$ (que G, H, I sean colineales).

Ejemplo 3.17 (Matroide de ciclos).

Dada una gráfica $G = (V, E)$, consideremos $S = E$ y los conjuntos independientes en nuestra matroide serán los conjuntos de aristas que no contienen ciclos (a las subgraficas que se generan así se les conoce como bosques).

Vamos a probar que el objeto definido es una matroide. Los primeros dos axiomas de matroides se cumplen de manera directa, vamos a probar el tercer

axioma. Supongamos que tenemos dos bosques A_1 y A_2 con $|A_1| = |A_2| + 1$. Cada componente conexa de A_2 debe ser un árbol por ser conexa y sin ciclos. Como A_1 tiene más aristas que A_2 , no es posible que cada componente conexa de A_1 esté contenida en alguna de A_2 , si alguna arista v de A_1 conecta 2 componentes conexas distintas de A_2 entonces podemos agregar la arista v a nuestro bosque A_2 y no generaremos ciclos, obtenemos que nuestra colección de subconjuntos de S sí nos define una matroide.

Los circuitos en esta matroide son los ciclos: Si algún conjunto de aristas no es independiente entonces contiene un ciclo; si un circuito contuviese un ciclo y alguna otra arista, al borrar esa arista seguiría existiendo nuestro ciclo, por lo que tendríamos una contradicción con la definición de circuito y si se tiene un ciclo, al borrar cualquier arista se obtiene un árbol.

Vamos a trabajar con el polinomio de Tutte principalmente en gráficas, para poder hacer esto definiremos las nociones de puente, lazo, contracción y borrado o restricción en matroides.

Definición 3.18. Un lazo en una matroide M es un elemento $e \in S$ tal que $\{e\} \notin \mathcal{I}$.

Los lazos en la matroide de ciclos coinciden con los lazos definidos en teoría de gráficas.

Definición 3.19. Un puente en una matroide $M = (E, \mathcal{I})$ es un elemento $e \in E$ tal que para todo $A \in \mathcal{I}$ se cumple $\{e\} \cup A \in \mathcal{I}$.

Los puentes en la matroide de ciclos corresponden con los puentes definidos en teoría de gráficas.

Definición 3.20. La restricción a $\hat{E} \subset E$ de una matroide $M = (E, \mathcal{I})$, con función de rango ρ , es la matroide $\hat{M} = (\hat{E}, \hat{\mathcal{I}})$ con función de rango ρ_s donde ρ_s es la restricción de ρ a subconjuntos de \hat{E} . A esto se le denota como $M \setminus S$ donde $S := E \setminus \hat{E}$. Borrar un elemento e se refiere a tomar la matroide restringida a $E \setminus \{e\}$, es decir tomar $M \setminus \{e\}$.

Los axiomas de rango se mantienen ciertos para ρ_s , por lo que nuestra definición si es en efecto la de una matroide.

Observemos que con esta definición, la matroide asociada a borrar un arista de la matroide de ciclos de G coincide con la matroide de ciclos obtenida después de borrar una arista de G .

Definición 3.21. Dada una matroide $M = (E, \mathcal{I})$ con función de rango ρ , la contracción de un subconjunto $T \subseteq E$ es la matroide cuyos elementos son $E \setminus T$ y función de rango $\hat{\rho}(A) := \rho(A \cup T) - \rho(T), \forall A \subseteq S \setminus T$. A la contracción de T la denotaremos como M/T .

Proposición 3.22. M/T es una matroide.

Demostración. Vamos a probar que la función $\hat{\rho}_s$ cumple los axiomas de rango. Notemos que $\rho(A \cup T) \geq \rho(T)$, por lo que $\hat{\rho} \geq 0$. Como $\rho(A) + \rho(T) \geq \rho(A \cup T) + \rho(A \cap T)$ tenemos que

$$|A| \geq \rho(A) \geq \rho(A) - \rho(A \cap T) \geq \rho(A \cup T) - \rho(T),$$

por lo que se cumple $|A| \geq \hat{\rho}(A)$ para todo $A \subseteq E \setminus T$. Si tenemos $X, Y \subseteq E \setminus T$ con $X \subseteq Y$, entonces tenemos $\rho(X \cup T) \leq \rho(Y \cup T)$ por lo que tenemos $\hat{\rho}(X) \leq \hat{\rho}(Y)$. Sean $X, Y \subseteq E \setminus T$, utilizando el tercer axioma de rango con $X \cup T$ y $Y \cup T$ obtenemos

$$\rho(X \cup Y \cup T) + \rho((X \cap Y) \cup T) \leq \rho(X \cup T) + \rho(Y \cup T).$$

Restando $\rho(T)$ a ambos lados obtenemos

$$\rho(X \cup Y \cup T) - \rho(T) + \rho((X \cap Y) \cup T) - \rho(T) \leq \rho(X \cup T) - \rho(T) + \rho(Y \cup T) - \rho(T),$$

con lo que concluimos que

$$\hat{\rho}(X \cup Y) + \hat{\rho}(X \cap Y) \leq \hat{\rho}(X) + \hat{\rho}(Y).$$

Como $\hat{\rho}$ cumple los axiomas de rango, tenemos que M/T es una matroide. \square

De manera similar a la restricción, contraer aristas en G corresponde a contraer la arista en su respectiva matroide de ciclos.

Proposición 3.23. Sea $M = (E, \mathcal{I})$ la matroide de ciclos de $G = (V, E)$, sea $M_1 = (E \setminus \{e\}, \mathcal{I}_1)$ la matroide obtenida al contraer $e \in E$ de M , sea $M_2 = (E_2, \mathcal{I}_2)$ la matroide de ciclos de G/e , entonces M_1 y M_2 son isomorfas.

Demostración. Primero notemos que ambas matroides M_1 y M_2 tienen $|E \setminus \{e\}|$ elementos, vamos a ver que hay una biyección entre sus conjuntos independientes. Podemos tomar una función $f : E \setminus \{e\} \rightarrow E_2$ de modo que esocia cada arista $e_1 \in E \setminus \{e\}$ a la arista que queda despues de contraer e en G , dicha función es biyectiva. Observemos que $f(A) = (A \cup e)/e$.

Supongamos que e es un lazo. En este caso ambas, M_1 y M_2 , corresponden con la matroide de ciclos cuando borramos e de G así que son isomorfas.

Supongamos que $e = \{u, v\} \in E$ no es un lazo. Sea ρ_1 la función de rango de M_1 . Supongamos que $A \subseteq E \setminus \{e\}$ cumple que $\rho_1(A) = |A|$, entonces se tiene

$$|A| = \rho_1(A) = \rho(A \cup \{e\}) - \rho(\{e\}) = \rho(A \cup \{e\}) - 1.$$

Como tenemos $\rho(A \cup \{e\}) = |A| + 1 = |A \cup \{e\}|$, entonces tenemos que $A \cup \{e\}$ no contienen ciclos. Esto nos dice que no hay un camino de u a v que no utilice a e en $A \cup \{e\}$.

De manera semejante si no hay un ciclo en $f(A) = (A \cup \{e\})/e$, no hay caminos con aristas que comiencen y terminen en un mismo vértice, por lo que tampoco puede haber un camino en A que empiece en u y termine en v ni un ciclo. Tenemos que $\rho(A \cup \{e\}) = |A| + 1$ por lo que $\rho_1(A) = |A|$ y entonces terminamos con $A \in \mathcal{S}_1$. \square

3.3. Polinomio de Tutte

En esta sección definimos y establecemos propiedades básicas del polinomio de Tutte. Como se mencionó antes, este invariante de matroides es muy útil en el estudio de propiedades combinatorias de gráficas. Estas propiedades cumplen una recursión bajo las operaciones de contracción y borrado. Casos particulares importantes de este polinomio son el número cromático y el número de orientaciones acíclicas. Describimos la relación con estos dos números.

Definición 3.24. Dada una matroide $M = (E, \mathcal{S})$, el polinomio de Tutte $T(M; x, y)$ se define de manera recursiva:

- Si $E = \emptyset$ entonces $T(M; x, y) = 1$.
- Si $e \in E$ es un puente entonces $T(M; x, y) = xT(M \setminus e; x, y)$.
- Si $e \in E$ es un lazo entonces $T(M; x, y) = yT(M \setminus e; x, y)$.
- Si $e \in E$ no es un lazo ni un puente entonces $T(M; x, y) = T(M \setminus e; x, y) + T(M/e; x, y)$.

En principio no es claro por qué el polinomio de Tutte no depende del orden en el que elegimos los elementos a eliminar. Para demostrar ésto vamos a utilizar algunas herramientas adicionales.

Existe una definición distinta del polinomio de Tutte, que es 0 en gráficas no conexas.

Definición 3.25. Dada una gráfica $G = (V, E)$ y su matroide de ciclos $M = (E, \mathcal{S})$, el polinomio de Tutte $T_1(M; x, y)$ se define de manera recursiva como sigue.

- Si $E = \emptyset$ y $|V| = 1$ entonces $T_1(M; x, y) = 1$.

- Si $E = \emptyset$ y $|V| > 1$ entonces $T_1(M; x, y) = 0$.
- Si $e \in E$ es un puente entonces $T(M; x, y) = xT(M/e; x, y)$.
- Si $e \in E$ es un lazo entonces $T(M; x, y) = yT(M \setminus e; x, y)$.
- Si $e \in E$ no es un lazo ni un puente entonces $T(M; x, y) = T(M \setminus e; x, y) + T(M/e; x, y)$.

Observación 3.26. En realidad ambos polinomios $T(G; x, y)$ y $T_1(G; x, y)$ son iguales cuando G es una gráfica conexa, pues al calcularlos recursivamente llegamos al mismo resultado.

Ambos polinomios serán utilizados posteriormente en este capítulo.

Definición 3.27. La función generadora de rango de una matroide $M = (E, \mathcal{I})$, con función de rango ρ , es el polinomio en dos variables

$$R(M; u, v) := \sum_{A \subseteq E} u^{\rho(E) - \rho(A)} v^{|A| - \rho(A)}.$$

Vamos a probar que el polinomio de Tutte $T(G; x, y)$ es en efecto un polinomio.

Teorema 3.28. *El polinomio de Tutte de una matroide $M = (E, \mathcal{I})$ se determina de manera única como*

$$T(M; x, y) = R(M; x - 1, y - 1).$$

Demostración. Sea ρ la función de rango de M . Vamos a verificar que las recurrencias del polinomio de Tutte se cumplen para nuestra función $R(M; x - 1, y - 1)$

- Si tenemos $E = \emptyset$ entonces $R(M; x - 1, y - 1) = 1$. Se cumple el primer punto pues la función generadora de rango es 1 cuando no hay elementos.
- Si $e \in E$ es un puente entonces $R(M; x - 1, y - 1) = xR(M \setminus \{e\}; x - 1, y - 1)$.

Prueba: Sea ρ_1 la función de rango de $M \setminus \{e\}$. Sea $A \subset E$, tenemos que si $e \in A$ entonces, como e es un puente, al retirarlo de A se reduce en 1 la cardinalidad de cualquier conjunto independiente maximal en A y por lo

tanto tenemos $\rho(A) = \rho_1(A \setminus \{e\}) + 1$. Si $e \notin A$ entonces $\rho(A) = \rho_1(A)$. Luego podemos partir la suma que aparece de la función generadora de rango

$$\begin{aligned} R(M; x-1, y-1) &= \sum_{A \subseteq E \setminus e} (x-1)^{\rho(E)-\rho(A)} (y-1)^{|A|-\rho(A)} \\ &\quad + \sum_{A: e \in A \subseteq E} (x-1)^{\rho(E)-\rho(A)} (y-1)^{|A|-\rho(A)}. \end{aligned}$$

Como $\rho(E) = \rho(E \setminus \{e\}) + 1$ se sigue que si $e \in A$ entonces

$$\begin{aligned} \rho(E) - \rho(A) &= \rho_1(E \setminus \{e\}) - \rho_1(A \setminus \{e\}), \\ |A| - \rho(A) &= |A \setminus \{e\}| - \rho_1(A \setminus \{e\}). \end{aligned}$$

Obtenemos

$$\begin{aligned} R(M; x-1, y-1) &= \sum_{A \subseteq E \setminus e} (x-1)^{\rho_1(E \setminus \{e\})+1-\rho_1(A)} (y-1)^{|A|-\rho_1(A)} \\ &\quad + \sum_{A: e \in A \subseteq E} (x-1)^{\rho_1(E \setminus \{e\})-\rho_1(A \setminus \{e\})} (y-1)^{|A \setminus \{e\}|-\rho_1(A \setminus \{e\})}. \end{aligned}$$

Como se cumple $\{A \setminus \{e\} | e \in A \subseteq E\} = \{A \subseteq E \setminus \{e\}\}$ entonces podemos reagrupar nuestra suma en

$$\begin{aligned} R(M; x-1, y-1) &= (x-1+1) \sum_{A \subseteq E \setminus e} (x-1)^{\rho_1(M \setminus \{e\})-\rho_1(A)} (y-1)^{|A|-\rho_1(A)} \\ &= x \sum_{A \subseteq E \setminus e} (x-1)^{\rho_1(M \setminus \{e\})-\rho_1(A)} (y-1)^{|A|-\rho_1(A)} \\ &= xR(M \setminus \{e\}; x-1, y-1). \end{aligned}$$

- Si $e \in E$ es un lazo entonces $R(M; x-1, y-1) = yR(M \setminus e; x-1, y-1)$.

Prueba: De nuevo dividiremos nuestra suma en la función generadora de rango

$$\begin{aligned} R(M; x-1, y-1) &= \sum_{A \subseteq E \setminus e} (x-1)^{\rho(E)-\rho(A)} (y-1)^{|A|-\rho(A)} \\ &\quad + \sum_{A: e \in A \subseteq E} (x-1)^{\rho(E)-\rho(A)} (y-1)^{|A|-\rho(A)}. \end{aligned}$$

Se cumple que

$$\rho(A) = \rho(A \cup \{e\}) - \rho(\{e\}), \forall A \subseteq E,$$

Así que, si ρ_1 es la función de rango de $M \setminus \{e\}$ se tiene

$$\begin{aligned}
R(M; x-1, y-1) &= \sum_{A \subseteq E \setminus e} (x-1)^{\rho_1(E \setminus \{e\}) - \rho_1(A)} (y-1)^{|A| - \rho_1(A)} \\
&\quad + \sum_{A: e \in A \subseteq E} (x-1)^{\rho_1(E \setminus \{e\}) - \rho_1(A \setminus \{e\})} (y-1)^{|A \setminus \{e\}| + 1 - \rho_1(A \setminus \{e\})} \\
&= (y-1+1) \sum_{A \subseteq E \setminus e} (x-1)^{\rho_1(E \setminus \{e\}) - \rho_1(A)} (y-1)^{|A| - \rho_1(A)} \\
&= yR(M \setminus \{e\}; x-1, y-1).
\end{aligned}$$

- Si e no es un lazo ni un puente entonces

$$R(M; x-1, y-1) = R(M \setminus e; x-1, y-1) + R(M/e; x-1, y-1).$$

Prueba: Sea ρ_1 la función generadora de rango de $M \setminus \{e\}$ y ρ_2 la función generadora de rango de $M/\{e\}$. Reescribiremos de nuevo la suma en la función generadora de rango

$$\begin{aligned}
R(M; x-1, y-1) &= \sum_{A \subseteq E \setminus \{e\}} (x-1)^{\rho(E) - \rho(A)} (y-1)^{|A| - \rho(A)} \\
&\quad + \sum_{A: e \in A} (x-1)^{\rho(E) - \rho(A)} (y-1)^{|A| - \rho(A)}.
\end{aligned}$$

Como e no es un puente, existe una base a la que no pertenece, tenemos que $\rho(M) = \rho_1(M \setminus \{e\})$, para $A \subseteq E \setminus e$ se cumple $\rho(A) = \rho_1(A)$.

Como e no es lazo ni un puente tenemos que $\rho_2(E/e) = \rho(E) - 1$ y para A tal que $e \in A$, $\rho_2(A) = \rho(A) - 1$. En esos casos obtenemos $\rho(E) = \rho_2(E/e) + 1$ y $\rho(A) = \rho_2(A \setminus \{e\}) + 1$. Sustituyendo en los dos sumandos obtenemos

$$\begin{aligned}
R(M; x-1, y-1) &= \sum_{A \subseteq E \setminus e} (x-1)^{\rho_1(E) - \rho_1(A)} (y-1)^{|A| - \rho_1(A)} \\
&\quad + \sum_{A: e \in A} (x-1)^{\rho_2(E/e) + 1 - (\rho_2(A) + 1)} (y-1)^{|A/e| + 1 - (\rho_2(A) + 1)},
\end{aligned}$$

por lo que obtenemos

$$R(M; x-1, y-1) = R(M \setminus e; x-1, y-1) + R(M/e; x-1, y-1).$$

□

De este modo, como la función generadora de rango cumple las mismas propiedades que $T(M; x, y)$, tenemos que $T(M; x, y)$ está definido de manera única sin importar el orden en que retiremos sus elementos y se cumple

$$T(M; x, y) = \sum_{A \subseteq E} (x-1)^{\rho(E)-\rho(A)} (y-1)^{|A|-\rho(A)}.$$

Para nuestro estudio de fórmulas entre cumulantes, queremos comprender la demostración de la fórmula entre cumulantes clásicos y libres, así como entre cumulantes clásicos y booleanos. En ambas pruebas aparece una evaluación del polinomio de Tutte. Nos interesa estudiar $T_1(G; 1, 0)$.

Definición 3.29. Dada una gráfica G , una orientación acíclica con raíz v es una asignación de dirección a cada arista de la gráfica G , tal que para todo vértice $u \in G$ existe un camino de v a u respetando la orientación y de modo que la orientación no contiene ciclos dirigidos.

Teorema 3.30. Sea $G = (V, E)$ una gráfica, $T_1(G; 1, 0)$ cuenta la cantidad de orientaciones acíclicas con raíz de G .

Demostración. Fijemos un v arbitrario en G . Sea $f(G)$ nuestra función que cuenta las orientaciones acíclicas.

Si G tiene más de una componente, no hay orientaciones acíclicas con raíz, por lo que $f(G) = 0$.

Si G tiene un lazo, entonces todas las orientaciones contendrán un ciclo por lo que $f(G) = (0)f(G \setminus e)$.

Si G contiene un puente $e \in E$, como G es conexa, al quitar el puente deben formarse exactamente 2 componentes conexas. Como v sólo puede pertenecer a una de las 2 y debe haber una trayectoria en G de v a cualquier otro vértice, entonces la orientación del puente queda determinada y obtenemos $f(G) = f(G/e)$.

Si e no es un puente ni un lazo entonces consideremos la gráfica $G \setminus e$. En dicha gráfica, consideremos una orientación acíclica.

Sean v_1 y v_2 los dos extremos de e . Si no podemos agregar la arista dirigida (v_1, v_2) a la orientación de $G \setminus \{e\}$ sin crear un ciclo, quiere decir que hay un camino de v_2 a v_1 , pero entonces no puede haber un camino de v_1 a v_2 pues la orientación de $G \setminus e$ tendría un ciclo. En ese caso podemos agregar la arista dirigida (v_2, v_1) a nuestra orientación.

Si es posible agregar ambas orientaciones, podemos contraer a e sin obtener un ciclo. Si consideramos una orientación de G/e nos genera una orientación de $G \setminus e$ donde podemos agregar cualquiera de las 2 orientaciones de e . Utilizando principio aditivo obtenemos $f(G) = f(G \setminus e) + f(G/e)$, con lo que concluimos que $f(G) = T_G(1, 0)$. \square

En general el polinomio de Tutte generaliza una familia de funciones sobre las gráficas, vamos a definir dichas funciones.

Definición 3.31. Una función f del conjunto de gráficas a algún campo K de característica 0 es llamado un invariante cromático (o invariante de Tutte-Grothendieck) si:

1. Si G no tiene aristas, entonces $f(G) = 1$.
2. Existe un par fijo $A, B \in K$ tal que

$$f(G) = \begin{cases} Af(G \setminus e), & \text{si } e \text{ es un puente,} \\ Bf(G \setminus e), & \text{si } e \text{ es un lazo.} \end{cases}$$

3. Existen constantes $\alpha \neq 0$ y $\beta \neq 0$ tales que si e no es un lazo ni un puente se tiene

$$f(G) = \alpha f(G \setminus e) + \beta f(G/e).$$

Al siguiente resultado se le conoce como el teorema de la receta.

Teorema 3.32. Sea f un invariante cromático, con A, B, α, β como las constantes previamente mencionadas. Para todas las gráficas $G = (V, E)$ se cumple

$$f(G) = \alpha^{|E|-|V|+k(G)} \beta^{|V|-k(G)} T(G; \frac{A}{\alpha}, \frac{B}{\beta}),$$

donde $k(G)$ denota el número de componentes conexas de G .

Demostración. La fórmula del teorema se cumple para las gráficas sin aristas pues $|E| - |V| + k(G) = 0 - |V| + |V| = 0$ y $|V| - k(G) = 0$. Entonces se cumple $\alpha^{|E|-|V|+k(G)} \beta^{|V|-k(G)} T(G; \frac{A}{\alpha}, \frac{B}{\beta}) = 1 = f(G)$.

Si G consiste de sólo ℓ puentes y m lazos, entonces G sin considerar los lazos es un bosque pues todas sus aristas son puentes, así que $k(G) = |V| - |\ell|$ y como $|E| = \ell + m$ tenemos $|E| - |V| + k(G) = m$.

Cuando G consiste sólo de ℓ puentes y m lazos se deduce que

$$T(G; x, y) = x^\ell y^m.$$

Por un lado tenemos que

$$\begin{aligned} \alpha^{|E|-|V|+k(G)} \beta^{|V|-k(G)} T(G; \frac{A}{\alpha}, \frac{B}{\beta}) &= \alpha^m \beta^\ell \left(\frac{A}{\beta}\right)^\ell \left(\frac{B}{\alpha}\right)^m \\ &= A^\ell B^m, \end{aligned}$$

pero por otro lado las propiedades recursivas de f nos dan

$$f(G) = A^\ell B^m,$$

así que el teorema es cierto cuando G esta conformado solamente por ℓ puentes y m lazos.

Procederemos por inducción fuerte sobre el número de aristas en G . Si $e \in E$ no es un lazo ni un puente, de la recursión de f y que $k(G) = k(G \setminus e) = k(G/e)$, se sigue que

$$\begin{aligned} f(G) &= \alpha f(G \setminus e) + \beta f(G/e) \\ &= \alpha \alpha^{|E|-1-|V|+k(G)} \beta^{|V|-k(G)} T(G \setminus e; \frac{A}{\beta}, \frac{B}{\alpha}) \\ &\quad + \beta \alpha^{|E|-1-|V|+1+k(G)} \beta^{|V|-1-k(G)} T(G/e; \frac{A}{\beta}, \frac{B}{\alpha}) \\ &= \alpha^{|E|-|V|+k(G)} \beta^{|V|-k(G)} [T(G \setminus e; \frac{A}{\alpha}, \frac{B}{\beta}) + T(G/e; \frac{A}{\beta}, \frac{B}{\alpha})] \\ &= \alpha^{|E|-|V|+k(G)} \beta^{|V|-k(G)} T(G; \frac{A}{\beta}, \frac{B}{\alpha}). \end{aligned}$$

□

Ahora procederemos a utilizar esta herramienta para ver la relación entre el polinomio cromático y el polinomio de Tutte de una gráfica dada.

Ejemplo 3.33. Vamos a probar que si tomamos $f(G) = \frac{x(G;\lambda)}{\lambda^{k(G)}}$ para toda gráfica G , entonces f es un invariante cromático.

Observemos que si e es un puente entonces

$$\begin{aligned} f(G) &= \frac{(\lambda - 1) x(G \setminus e; \lambda)}{\lambda \lambda^{k(G)}} \\ &= \frac{(\lambda - 1) x(G \setminus e; \lambda)}{\lambda^{k(G \setminus e) + 1}} \\ &= (\lambda - 1) f(G \setminus e). \end{aligned}$$

Si G tiene un lazo entonces $f(G) = 0$.

Si e no es un lazo ni un puente, entonces:

$$f(G) = \frac{x(G \setminus e; \lambda) - x(G/e; \lambda)}{\lambda^{k(G)}} = f(G \setminus e) - f(G/e).$$

Así que f es un invariante cromático con $A = \lambda - 1, B = 0, \alpha = 1, \beta = -1$. Al despejar el polinomio cromático del teorema de la receta obtenemos

$$x(G, \lambda) = (-1)^{|V|-k(G)} \lambda^{k(G)} T(G; 1 - \lambda, 0).$$

Capítulo 4

Relaciones entre cumulantes

En el Capítulo 2 vimos cómo podemos escribir los momentos en términos de cada tipo de cumulantes, así como las fórmulas para escribir a cada tipo de cumulantes en términos de los momentos. En este capítulo vamos a estudiar algunas fórmulas para escribir unos cumulantes en términos de otros. Este capítulo está basado en el artículo [5].

En la Sección 4.1 se establecen y prueban las fórmulas de cumulantes booleanos en términos de cumulantes monótonos, cumulantes booleanos en términos de cumulantes libres, cumulantes booleanos en términos de cumulantes clásicos y cumulantes libres en términos de cumulantes clásicos. En estas pruebas se utiliza un operador cerradura y se utiliza fuertemente el hecho de que $I(n) \subseteq NC(n) \subseteq P(n)$.

En la Sección 4.2 se establecen y prueban las fórmulas de cumulantes libres en términos de cumulantes booleanos y cumulantes libres en términos de cumulantes monótonos. En estas pruebas se utilizan las funciones generadoras definidas previamente en el Capítulo 2.

En la Sección 4.3 se establecen y prueban las fórmulas de cumulantes clásicos en términos de cumulantes libres y cumulantes clásicos en términos de cumulantes booleanos. En estas pruebas se utiliza el polinomio de Tutte que se definió en el Capítulo 3.

4.1. Operadores cerradura

Ya que tenemos las relaciones entre cumulantes y momentos, podemos despejar un tipo de cumulantes en términos de los momentos y después sustituir los momentos con alguna de las otras fórmulas entre cumulantes y momentos.

Dada una función $F : \mathcal{A}^n \rightarrow \mathbb{C}$, escribiremos F_n y F_π para simplificar la

redacción al referirnos a $F_n(X_1, \dots, X_n)$ y $F_\pi(X_1, \dots, X_n)$ respectivamente.

Primero vamos a calcular la relación entre cumulantes booleanos y cumulantes monótonos. Recordemos que en la definición de cumulantes booleanos aparecen particiones por intervalos y en la de los monótonos aparecen particiones que no se cruzan; vamos a utilizar un operador cerradura para relacionarlos.

Definición 4.1. Dadas dos particiones $\sigma_1, \sigma_2 \in P(n)$, definimos el operador $\wedge : P(n) \times P(n) \rightarrow P(n)$ de modo que $\sigma_1 \wedge \sigma_2$ es la mayor partición $\sigma_3 \in P(n)$ tal que $\sigma_3 \leq \sigma_1$ y $\sigma_3 \leq \sigma_2$.

Lema 4.2. *Dados $\sigma_1, \sigma_2 \in P(n)$, existe $\sigma_1 \wedge \sigma_2$.*

Demostración. Sea \sim_1 la relación asociada a σ_1 y \sim_2 la relación asociada a σ_2 . Vamos a definir la relación \sim_3 en $[n]$ de modo que, dados $i, j \in [n]$, se tiene $i \sim_3 j$ si y sólo si $i \sim_1 j$ y $i \sim_2 j$.

Es una relación de equivalencia, pues la simetría y reflexividad se cumplen tanto en \sim_1 como en \sim_2 . Para la transitividad tenemos que si $x, y, z \in [n]$ son tales que $x \sim_3 y$ y $y \sim_3 z$, entonces se cumple $x \sim_1 y$, $y \sim_1 z$, $x \sim_2 y$ y $y \sim_2 z$. Por lo que se cumple $x \sim_1 z$ y $x \sim_2 z$, con lo que obtenemos $x \sim_3 z$. Tomamos a $\sigma_1 \wedge \sigma_2$ como la partición asociada a \sim_3 .

Sea $\gamma \in P(n)$ una partición tal que $\gamma \leq \sigma_1$ y $\gamma \leq \sigma_2$. Sean $i, j \in [n]$ tales que $i \sim_\gamma j$, entonces tenemos que $i \sim_1 j$ y $i \sim_2 j$, por lo que obtenemos $i \sim_3 j$. Ya que se cumple que $i \sim_\gamma j$ implica que $i \sim_3 j$, tenemos que $\gamma \leq \sigma_1 \wedge \sigma_2$. \square

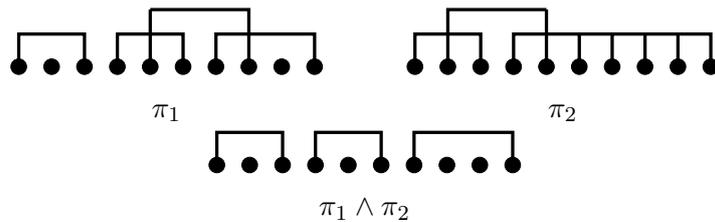
Ejemplo 4.3. Si tenemos

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \{\{1, 3\}, \{2\}, \{4, 6\}, \{5, 8\}, \{7, 10\}, \{9\}\} \\ \pi_2 &= \{\{1, 3\}, \{2, 5\}, \{4, 6, 7, 8, 9, 10\}\}, \end{aligned}$$

obtenemos

$$\pi_1 \wedge \pi_2 = \{\{1, 3\}, \{2\}, \{4, 5\}, \{6\}, \{7, 10\}, \{8\}, \{9\}\}.$$

Las respectivas representaciones lineales son



Observación 4.4. Si tenemos tres particiones $\pi_1, \pi_2, \pi_3 \in P(n)$ asociadas a las relaciones \sim_1, \sim_2 y \sim_3 , respectivamente, se cumple $(\pi_1 \wedge \pi_2) \wedge \pi_3 = \pi_1 \wedge (\pi_2 \wedge \pi_3)$. Esto sucede porque ambas particiones están asociadas a la relación \sim_4 en $[n]$ tal que, dados $i, j \in [n]$, se tiene $i \sim_4 j$ si y sólo si $i \sim_1 j$, $i \sim_2 j$ e $i \sim_3 j$.

Con esto podemos utilizar la notación $\pi_1 \wedge \pi_2 \wedge \pi_3$ sin riesgo a confusión. Sean $k \in \mathbb{N}$ y $\pi_1, \dots, \pi_k \in \mathbb{N}$ con $k \geq 2$. Usaremos la notación

$$\bigwedge_{i=1}^k \pi_i := \begin{cases} \pi_k \wedge (\bigwedge_{i=1}^{k-1} \pi_i) & , \text{ si } k > 2; \\ \pi_1 \wedge \pi_2 & , \text{ si } k = 2. \end{cases}$$

Definición 4.5. Dadas dos particiones $\sigma_1, \sigma_2 \in P(n)$, definimos el operador $\vee : P(n) \times P(n) \rightarrow P(n)$ de modo que $\sigma_1 \vee \sigma_2$ es la menor partición $\sigma_3 \in P(n)$ tal que $\sigma_3 \geq \sigma_1$ y $\sigma_3 \geq \sigma_2$.

Lema 4.6. Dadas $\sigma_1, \sigma_2 \in P(n)$, existe $\sigma_1 \vee \sigma_2 \in P(n)$.

Demostración. Notemos que $\hat{1}_n \geq \sigma_1$ y $\hat{1}_n \geq \sigma_2$, así que el conjunto $A := \{\pi \in P(n) | \pi \geq \sigma_1, \pi \geq \sigma_2\}$ es no vacío.

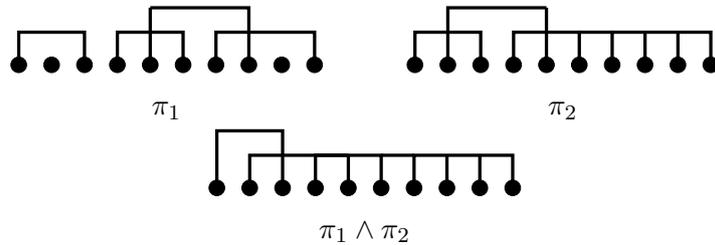
Como $P(n)$ es finito, numeramos $A = \{\pi_1, \dots, \pi_k\}$. Por definición, tenemos que dadas tres particiones $\sigma, \pi, \gamma \in P(n)$, si se cumple que $\pi \geq \gamma$ y $\sigma \geq \gamma$ se tiene que $\pi \wedge \sigma \geq \gamma$, al aplicar esto para k elementos se obtiene $\bigwedge_{i=1}^k \pi_i \geq \sigma_1$ y $\bigwedge_{i=1}^k \pi_i \geq \sigma_2$.

Se cumple $\pi_j \geq \bigwedge_{i=1}^k \pi_i$ para $j = 1, \dots, k$, por lo que $\bigwedge_{i=1}^k \pi_i = \sigma_1 \vee \sigma_2$. \square

Ejemplo 4.7. Si tenemos

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \{\{1, 3\}, \{2\}, \{4, 6\}, \{5, 8\}, \{7, 10\}, \{9\}\} \text{ y} \\ \pi_2 &= \{\{1, 3\}, \{2, 5\}, \{4, 6, 7, 8, 9, 10\}\}, \end{aligned}$$

entonces tenemos $\pi_1 \vee \pi_2 = \{\{1, 3\}, \{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}\}$ y sus representaciones lineales son



Podemos definir los operadores \vee y \wedge para COPOs en general. Los COPOs en los que siempre existen \vee y \wedge para todo par de elementos, son conocidos como látices. Sólo vamos a utilizar los operadores \vee y \wedge como se definieron para $P(n)$, por lo que no profundizaremos más en propiedades de látices.

Observación 4.8. Notemos que cada bloque de $\sigma_1 \wedge \sigma_2$ está conformado por tomar la intersección no vacía entre un bloque de σ_1 y un bloque de σ_2 . Si tenemos $\sigma_1, \sigma_2 \in I(n) \subseteq P(n)$, los bloques de ambas particiones son intervalos y sus intersecciones serán intervalos. Se cumple $\sigma_1 \wedge \sigma_2 \in I(n)$.

Observación 4.9. Sean $\sigma_1, \sigma_2 \in NC(n) \subseteq P(n)$, supongamos $\sigma_1 \wedge \sigma_2 \notin NC(n)$. Es necesario que existan x, y, u, v de modo que $x > u > y > v$ y $x, y \in V$, $u, v \in W$ para algún par $V, W \in \sigma_1 \wedge \sigma_2$ con $V \neq W$. Esto nos dice que existen bloques $V_1, W_1 \in \sigma_1$ tales que $x, y \in V_1$ y $u, v \in W_1$ y como tenemos $\sigma \in NC(n)$, se debe cumplir $V_1 = W_1$. Análogamente obtenemos que x, y, u, v pertenecen a un mismo bloque de σ_2 . Tendríamos que x, y, u, v pertenecen a un mismo bloque en σ_1 y σ_2 , por lo que pertenecen a un mismo bloque en $\sigma_1 \wedge \sigma_2$, lo cual es una contradicción.

Concluimos que si tenemos $\sigma_1, \sigma_2 \in NC(n)$, entonces se tiene $\sigma_1 \wedge \sigma_2 \in NC(n)$.

Definición 4.10. Definimos el operador cerradura $\hat{\cdot}: P(n) \rightarrow I(n)$ como la función que a π le asigna la menor partición por intervalos $\hat{\pi}$ tal que $\hat{\pi} \geq \pi$.

Lema 4.11. *Existe $\hat{\pi}$ para todo $\pi \in P(n)$.*

Demostración. Sea $\pi \in P(n)$. Consideremos el conjunto $A = \{\sigma \in I(n) \mid \sigma \geq \pi\}$. Como $\hat{1}_n \geq \pi$, tenemos que A es no vacío. Como $P(n)$ es finito, numeramos a A como $A = \{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Observemos que la partición $\bigwedge_{j=1}^k \sigma_j$ pertenece a $I(n)$ pues $A \subseteq I(n)$. Tenemos que $\sigma_j \geq \bigwedge_{i=1}^k \sigma_i \geq \pi$ para $j = 1, \dots, k$.

Concluimos que $\bigwedge_{i=1}^k \sigma_i$ es la menor partición por intervalos que es mayor o igual que π , es decir $\bigwedge_{j=1}^k \sigma_j = \hat{\pi}$. \square

A las particiones $\pi \in P(n)$ que cumplen $\hat{\pi} = \hat{1}_n$ las llamamos irreducibles. Para $\pi \in NC(n)$, esta definición de irreducible coincide con la Definición 2.34. Denotamos al conjunto de particiones irreducibles como $P_{irr}(n)$ y a las particiones irreducibles contenidas en $NC(n)$ como $NC_{irr}(n)$.

También definiremos un operador cerradura para las particiones que no se cruzan.

Definición 4.12. Definimos el operador cerradura $\bar{\cdot}: P(n) \rightarrow NC(n)$ como la función que a π le asigna la menor partición que no se cruza $\bar{\pi}$ tal que $\bar{\pi} \geq \pi$.

Lema 4.13. *Existe $\bar{\pi}$ para todo $\pi \in P(n)$.*

Demostración. Sea $\pi \in P(n)$. Consideremos el conjunto $A = \{\sigma \in NC(n) \mid \sigma \geq \pi\}$. Como $\hat{1}_n \geq \pi$ para todo π , tenemos que A es no vacío. Como $P(n)$ es finito, numeramos los elementos de A como $A = \{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Observemos que la partición $\bigwedge_{j=1}^k \sigma_k$ pertenece a $NC(n)$ pues $A \subseteq NC(n)$. Tenemos que $\sigma_i \geq \bigwedge_{j=1}^k \sigma_k \geq \pi$ para $i = 1, \dots, k$.

Concluimos que $\bigwedge_{j=1}^k \sigma_k$ es la menor partición que no se cruza que es mayor o igual que π , es decir $\bigwedge_{j=1}^k \sigma_k = \bar{\pi}$. \square

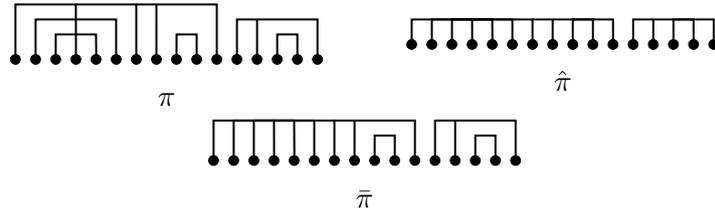
Ejemplo 4.14. Si tenemos

$$\pi = \{\{1, 4, 7, 8, 11\}, \{2, 6\}, \{3, 5\}, \{9, 10\}, \{12, 13, 16\}, \{14, 15\}\},$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \hat{\pi} &= \{\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}, \{12, 13, 14, 15, 16\}\}, \\ \bar{\pi} &= \{\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11\}, \{9, 10\}, \{12, 13, 16\}, \{14, 15\}\}, \end{aligned}$$

con sus respectivas representaciones lineales



Ahora tenemos las herramientas necesarias para probar los teoremas de esta sección.

Teorema 4.15. *Sea (\mathcal{A}, ϕ) un EPNC, sea $(X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{A}^n$. Se cumple la relación*

$$B_n(X_1, \dots, X_n) = \sum_{\pi \in NC(n)_{irr}} \frac{1}{\tau(\pi)!} H_\pi(X_1, \dots, X_n).$$

Demostración. Definamos la serie auxiliar de funciones $\hat{B}_n : \mathcal{A}^n \rightarrow \mathcal{C}$ como

$$\hat{B}_n := \sum_{\pi \in NC_{irr}(n)} \frac{1}{\tau(\pi)!} H_\pi.$$

Extendemos \hat{B}_n a \hat{B}_π de manera multiplicativa. Probaremos que $\hat{B}_n = B_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Si $\pi \in P(n)$ tiene bloques V_1, \dots, V_k , entonces se cumple

$$M_\pi = \prod_{j=1}^k M_{|V_j|}.$$

Sustituyendo cada $M_{|V_j|}$ por lo que obtenemos en la fórmula entre momentos y cumulantes booleanos, obtenemos

$$\begin{aligned} M_\pi &= \sum_{(\sigma_1, \lambda_1) \in \mathcal{M}(|V_1|)} \cdots \sum_{(\sigma_k, \lambda_k) \in \mathcal{M}(|V_k|)} \frac{1}{|\sigma_1|! \cdots |\sigma_k|!} H_{\sigma_1} \cdots H_{\sigma_k} \\ &= \sum_{\sigma_1 \in NC(|V_1|)} \cdots \sum_{\sigma_k \in NC(|V_k|)} \frac{1}{\tau(\sigma_1)! \cdots \tau(\sigma_k)!} H_{\sigma_1} \cdots H_{\sigma_k}. \end{aligned}$$

Como $\tau(\pi)!$ y H_n se extendieron de manera multiplicativa, obtenemos

$$M_\pi = \sum_{\sigma \in NC(n), \sigma \leq \pi} \frac{1}{\tau(\sigma)!} H_\sigma.$$

Si tenemos particiones $\sigma \in P(n)$ y $\pi \in I(n)$ con $\sigma \leq \pi$, se cumple $\hat{\sigma} \leq \pi$. Reescribimos la suma anterior, obteniendo

$$M_\pi = \sum_{\rho \in I(n), \rho \leq \pi} \left(\sum_{\sigma \in NC(n), \hat{\sigma} = \rho} \frac{1}{\tau(\sigma)!} H_\sigma \right) = \sum_{\rho \in I(n), \rho \leq \pi} \hat{B}_\rho.$$

Si utilizamos la fórmula de inversión de Möbius, obtenemos que

$$\hat{B}_n = \sum_{\pi \in I(n)} \mu_I(\hat{0}_n, \hat{1}_n) M_\pi = B_n.$$

□

Notemos que en la prueba utilizamos que $I(n) \subseteq NC(n)$. Podemos repetir el mismo procedimiento cambiando $\frac{1}{\tau(\pi)!} H_\pi$ por $R(\pi)$ o por $K(\pi)$.

Teorema 4.16. *Sea (\mathcal{A}, ϕ) un EPNC, sea $(X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{A}^n$. Se cumplen las relaciones*

$$\begin{aligned} B_n(X_1, \dots, X_n) &= \sum_{\pi \in NC_{irr}(n)} R_\pi(X_1, \dots, X_n), \\ B_n(X_1, \dots, X_n) &= \sum_{\pi \in P_{irr}(n)} K_\pi(X_1, \dots, X_n). \end{aligned}$$

Demostración. De nuevo tomemos series auxiliares de funciones $\hat{B}_n, B_n^* : \mathcal{A}^n \rightarrow \mathbb{C}$, esta vez definidas como

$$\begin{aligned}\hat{B}_n(X_1, \dots, X_n) &:= \sum_{\pi \in NC_{irr}(n)} R_\pi(X_1, \dots, X_n), \\ B_n^*(X_1, \dots, X_n) &:= \sum_{\pi \in P_{irr}(n)} P_\pi(X_1, \dots, X_n).\end{aligned}$$

Extendemos \hat{B}_n y B_n^* a \hat{B}_π y B_π^* , para $\pi \in P(n)$, de manera multiplicativa. Si $\pi \in P(n)$ tiene bloques V_1, \dots, V_k , entonces se cumple

$$M_\pi = \prod_{j=1}^k M_{|V_j|}.$$

Por las fórmulas entre momentos y cumulantes obtenemos

$$\begin{aligned}M_\pi &= \sum_{\sigma_1 \in NC(|V_1|)} \dots \sum_{\sigma_k \in NC(|V_k|)} R_{\sigma_1} \dots R_{\sigma_k}, \\ M_\pi &= \sum_{\sigma_1 \in P(|V_1|)} \dots \sum_{\sigma_k \in P(|V_k|)} K_{\sigma_1} \dots K_{\sigma_k}.\end{aligned}$$

Como extendimos a R_n y K_n de manera multiplicativa, obtenemos

$$\begin{aligned}M_\pi &= \sum_{\sigma \in NC(n), \sigma \leq \pi} R_\sigma, \\ M_\pi &= \sum_{\sigma \in P(n), \sigma \leq \pi} K_\sigma.\end{aligned}$$

Si tenemos particiones $\sigma \in NC(n)$ o $\sigma \in P(n)$ y $\pi \in I(n)$ con $\sigma \leq \pi$, se cumple $\hat{\sigma} \leq \pi$. Agruparemos las sumas anteriores en

$$\begin{aligned}M_\pi &= \sum_{\rho \in I(n), \rho \leq \pi} \left(\sum_{\sigma \in NC(n), \hat{\sigma} = \rho} R_\sigma \right), \\ M_\pi &= \sum_{\rho \in I(n), \rho \leq \pi} \left(\sum_{\sigma \in P(n), \hat{\sigma} = \rho} K_\sigma \right).\end{aligned}$$

Obtenemos

$$\begin{aligned}M_\pi &= \sum_{\rho \in I(n), \rho \leq \pi} \hat{B}_\rho, \\ M_\pi &= \sum_{\rho \in I(n), \rho \leq \pi} B_\rho^*.\end{aligned}$$

Si utilizamos la fórmula de inversión de Möbius en ambas ecuaciones obtenemos que

$$\hat{B}_n = B_n^* = \sum_{\pi \in I(n)} \mu_I(\hat{0}, \hat{1}_n) M_\pi = B_n.$$

□

Del mismo modo, como tenemos $NC(n) \subseteq P(n)$, calcularemos la fórmula entre cumulantes libres y cumulantes clásicos.

Teorema 4.17. *Sea (\mathcal{A}, ϕ) un EPNC, sea $(X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{A}^n$. Se cumple la relación*

$$R_n(X_1, \dots, X_n) = \sum_{\pi \in P_{con}(n)} K_\pi(X_1, \dots, X_n).$$

La demostración de este teorema es análoga a la demostración del teorema anterior, utilizamos el operador cerradura $\bar{\cdot}$ en lugar del operador $\hat{\cdot}$, por lo que se omitirá la prueba.

4.2. Relaciones obtenidas utilizando funciones generadoras

Dado un EPNC (\mathcal{A}, ϕ) y $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{A}^n$, utilizaremos las funciones generadoras multivariadas definidas en la Sección 2:

$$M_{\mathbf{X}}(\vec{z}) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i_1, \dots, i_n \in [r]} M_n(X_{i_1}, \dots, X_{i_n}) z_{i_1} \dots z_{i_n},$$

$$B_{\mathbf{X}}(\vec{z}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i_1, \dots, i_n \in [r]} B_n(X_{i_1}, \dots, X_{i_n}) z_{i_1} \dots z_{i_n},$$

$$R_{\mathbf{X}}(\vec{z}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i_1, \dots, i_n \in [r]} R_n(X_{i_1}, \dots, X_{i_n}) z_{i_1} \dots z_{i_n},$$

$$H_{\mathbf{X}}(\vec{z}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i_1, \dots, i_n \in [r]} H_n(X_{i_1}, \dots, X_{i_n}) z_{i_1} \dots z_{i_n}.$$

Dados $t \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_r) \in \mathcal{A}^r$, definimos $\tilde{\mathbf{X}}(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t))$ de manera formal, para que se cumpla la relación

$$H_n(X_{i_1}(t), \dots, X_{i_n}(t)) := tH_n(X_{i_1}, \dots, X_{i_n}),$$

o de manera equivalente

$$\phi(X_{i_1}(t) \cdots X_{i_n}(t)) = \sum_{\pi \in \mathcal{M}(n)} \frac{t^{|\pi|}}{|\pi|!} H_\pi(X_{i_1}, \dots, X_{i_n}),$$

para toda elección de $(i_1, \dots, i_n) \in [r]^n$.

Definición 4.18. Dado un EPNC (\mathcal{A}, ϕ) , un natural $r \in \mathbb{N}$ y un vector $\mathbf{X} \in \mathcal{A}^r$, podemos definir las funciones

$$\begin{aligned} M_{\mathbf{X}}(t, \vec{z}) &:= M_{\mathbf{X}(t)}(\vec{z}), \\ \mathcal{M}_{\mathbf{X}}(t, \vec{z}) &:= \vec{z} M_{\mathbf{X}}(t, \vec{z}) = (z_1 M_{\mathbf{X}}(t, \vec{z}), \dots, z_r M_{\mathbf{X}}(t, \vec{z})), \\ \mathcal{H}_{\mathbf{X}}(\vec{z}) &:= \vec{z} H_{\mathbf{X}}(\vec{z}) = (z_1 H_{\mathbf{X}}(\vec{z}), \dots, z_r H_{\mathbf{X}}(\vec{z})). \end{aligned}$$

Notemos que $M_{\mathbf{X}}(0, \vec{z}) = 1$ y $\mathcal{M}_{\mathbf{X}}(0, \vec{z}) = \vec{z}$.

Teorema 4.19. Dado un EPNC (\mathcal{A}, ϕ) , un natural $r \in \mathbb{N}$ y un vector $\mathbf{X} \in \mathcal{A}^r$, se cumplen las propiedades

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{M}_{\mathbf{X}}(t, \vec{z}) &= \mathcal{H}_{\mathbf{X}}(\mathcal{M}_{\mathbf{X}}(t, \vec{z})), \\ \mathcal{M}_{\mathbf{X}}(t+s, \vec{z}) &= \mathcal{M}_{\mathbf{X}}(t, \mathcal{M}_{\mathbf{X}}(s, \vec{z})). \end{aligned}$$

Demostración. Para la primera parte vamos a comparar los coeficientes en cada lado de la igualdad. Vamos a proceder desarrollando ambos lados. Comenzaremos por el lado izquierdo de la igualdad

$$\frac{d}{dt} \mathcal{M}_{\mathbf{X}}(t, \vec{z}) = \frac{d}{dt} (z_1 M_{\mathbf{X}}(t, \vec{z}), \dots, z_r M_{\mathbf{X}}(t, \vec{z})).$$

La entrada j -ésima es

$$\frac{d}{dt} z_j M_{\mathbf{X}}(t, \vec{z}) = z_j \frac{d}{dt} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i_1, \dots, i_n \in [r]^n} M_n(X_{i_1}(t), \dots, X_{i_n}(t)) z_{i_1} \dots z_{i_n} \right).$$

Si sustituimos utilizando la relación entre momentos y cumulantes monótonos, obtenemos

$$\left(\frac{d}{dt} \mathcal{M}_{\mathbf{X}}(t, \vec{z}) \right)_j = z_j \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i_1, \dots, i_n \in [r]^n} \sum_{\pi \in NC(n)} \frac{t^{|\pi|}}{\tau(\pi)!} H_\pi(X_{i_1}, \dots, X_{i_n}) z_{i_1} \dots z_{i_n}.$$

El coeficiente de $z_j z_{i_1} \dots z_{i_n}$ es

$$\sum_{\pi \in NC(n)} \frac{|\pi| t^{|\pi|-1}}{\tau(\pi)!} H_\pi(X_{i_1}, \dots, X_{i_n}).$$

Del lado derecho tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\mathbf{X}}(\mathcal{M}_{\mathbf{X}}(t, \vec{z})) &= \mathcal{H}_{\mathbf{X}}(z_1 M_{\mathbf{X}}(t, \vec{z}), \dots, z_r M_{\mathbf{X}}(t, \vec{z})) \\ &= (z_1 M_{\mathbf{X}}(t, \vec{z}) H_{\mathbf{X}}(\mathcal{M}_{\mathbf{X}}(t, \vec{z})), \dots, z_r M_{\mathbf{X}}(t, \vec{z}) H_{\mathbf{X}}(\mathcal{M}_{\mathbf{X}}(t, \vec{z}))).\end{aligned}$$

La j -ésima entrada es

$$\begin{aligned}(\mathcal{H}_{\mathbf{X}}(\mathcal{M}_{\mathbf{X}}(t, \vec{z})))_j &= z_j M_{\mathbf{X}}(t, \vec{z}) H_{\mathbf{X}}(z_1 M_{\mathbf{X}}(t, \vec{z}), \dots, z_r M_{\mathbf{X}}(t, \vec{z})) \\ &= z_j (1 + \sum_{k_0=1}^{\infty} \sum_{i_1, \dots, i_{k_0} \in [r]} M_n(X_{i_1}, \dots, X_{i_{k_0}}) z_{i_1} \dots z_{i_{k_0}}) \\ &\quad \times \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j_1, \dots, j_m \in [r]} H_m(X_{j_1}, \dots, X_{j_m}) z_{j_1} M_{\mathbf{X}}(\vec{z}) \dots z_{j_m} M_{\mathbf{X}}(\vec{z}) \right)\end{aligned}$$

Nos interesa saber el coeficiente de $z_j z_{i_1} \dots z_{i_n}$. Usando la fórmula entre cumulantes monótonos y momentos obtendremos un coeficiente de la forma

$$\sum_{m=1}^n \sum_{\substack{k_0, k_1, \dots, k_m \in [n], \\ k_0 + k_1 + \dots + k_m + m = n}} H_m \prod_{i=0}^m \left(\sum_{\sigma_i \in NC(k_i)} \frac{t^{|\sigma_i|}}{\tau(\sigma_i)!} H_{\sigma_i} \right),$$

Donde los argumentos de las funciones se omitieron dada la longitud de la suma. Agrupamos los factores H_{σ_i} y H_m obtenemos un H_{π} , para algún $\pi \in NC(n)$. Escribiremos el coeficiente de $z_j z_{i_1} \dots z_{i_n}$ de la forma

$$\sum_{\pi \in NC(n)} \alpha(\pi) t^{|\pi|-1} H_{\pi}.$$

Sea $\pi \in NC(n)$ una partición fija y supongamos que dicha partición tiene bosque de anidamiento con árboles t_1, \dots, t_k , por lo que $|t_1| + \dots + |t_k| = |\pi|$.

Tomemos un t_i fijo y sea v_{i_1} su vértice raíz. H_m aporta con un bloque al producto H_{π} , pero debe ser un bloque asociado a una raíz y el resto de bloques los obtenemos de las H_{σ_i} s. Sumando los casos en los que la raíz con la que aporte H_m sea v_i obtenemos

$$\alpha(\pi) = t^{|\pi|-1} \sum_{i=1}^p \frac{1}{\tau(t_i \setminus \{v_i\})!} \prod_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^p \frac{1}{\tau(t_j)!}.$$

Por la recursión del árbol factorial tenemos

$$\begin{aligned}\alpha(\pi) &= t^{|\pi|-1} \sum_{i=1}^p \frac{|t_i|}{\tau(t_i)!} \prod_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^p \frac{1}{\tau(t_j)!} \\ &= t^{|\pi|-1} \sum_{i=1}^p \prod_{j=1}^p \frac{|t_i|}{\tau(t_j)!}.\end{aligned}$$

Como tenemos $|t_1| + \dots + |t_k| = |\pi|$, obtenemos

$$\alpha(\pi) = \frac{|\pi|^{|\pi|-1}}{\prod_{j=1}^p \tau(t_j)!}.$$

Como el árbol factorial es multiplicativo concluimos

$$\alpha(\pi) = \frac{|\pi|^{|\pi|-1}}{\tau(\pi)!}.$$

Para el segundo resultado, tomemos $s \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_r)$ fijos. Definamos

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow (\mathbb{C}[[z_1, \dots, z_r]])^r, \\ f(t) &:= \mathcal{M}_{\mathbf{X}}(t + s, \vec{z}), \end{aligned}$$

así como

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\rightarrow (\mathbb{C}[[z_1, \dots, z_r]])^r, \\ g(t) &:= \mathcal{M}_{\mathbf{X}}(t, \mathcal{M}_{\mathbf{X}}(s, \vec{z})). \end{aligned}$$

Por el primer resultado tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(t) &= H_{\mathbf{X}}(f(t)), \\ \frac{d}{dt} g(t) &= H_{\mathbf{X}}(g(t)). \end{aligned}$$

Tenemos

$$\begin{aligned} g(0) &= \mathcal{M}_{\mathbf{X}}(0, \mathcal{M}_{\mathbf{X}}(s, \vec{z})) = \mathcal{M}_{\mathbf{X}}(s, \vec{z}), \\ f(0) &= \mathcal{M}_{\mathbf{X}}(s, \vec{z}) = g(0). \end{aligned}$$

Por el teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales (teorema de Cauchy-Lipschitz), concluimos que $f(t) = g(t)$. \square

Dado un vector $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_r) \in \mathcal{A}^r$, podemos definir un vector formal $\tilde{X} = (\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_r)$ de modo que se cumpla la relación

$$R_n(\tilde{X}_{i_1}, \dots, \tilde{X}_{i_n}) = -B(X_{i_1}, \dots, X_{i_n}),$$

para toda elección de $i_1, \dots, i_n \in [r]$.

Lema 4.20. *Para cualquier $\mathbf{X} \in \mathcal{A}^r$ y cualquier $(i_1, \dots, i_n) \in [r]^n$ se cumple*

$$\begin{aligned} B_n(\tilde{X}_{i_1}, \dots, \tilde{X}_{i_n}) &= -R_n(X_{i_1}, \dots, X_{i_n}), \\ H_n(\tilde{X}_{i_1}, \dots, \tilde{X}_{i_n}) &= H_n(X_{i_1}, \dots, X_{i_n}). \end{aligned}$$

Demostración. Notemos que la primera afirmación es equivalente a demostrar que $B_{\tilde{\mathbf{X}}}(\vec{z}) = -R_{\mathbf{X}}(\vec{z})$. Recordemos que por el Teorema 2.52 se cumple

$$B_{\mathbf{X}}(\vec{z})M_{\mathbf{X}}(\vec{z}) = M_{\mathbf{X}}(\vec{z}) - 1.$$

De la definición de $\tilde{\mathbf{X}}$ obtenemos la relación $-R_{\tilde{\mathbf{X}}}(\vec{z}) = -B_{\tilde{\mathbf{X}}}(\vec{z})$. Sustituyendo esto en la ecuación anterior obtenemos

$$-R_{\tilde{\mathbf{X}}}(\vec{z})M_{\mathbf{X}}(\vec{z}) = M_{\mathbf{X}}(\vec{z}) - 1$$

Si sustituimos \vec{z} por $\mathcal{M}_{\tilde{\mathbf{X}}}(\vec{z})$ tenemos

$$-R_{\tilde{\mathbf{X}}}(\mathcal{M}_{\tilde{\mathbf{X}}}(\vec{z}))M_{\mathbf{X}}(\mathcal{M}_{\tilde{\mathbf{X}}}(\vec{z})) = M_{\mathbf{X}}(\mathcal{M}_{\tilde{\mathbf{X}}}(\vec{z})) - 1$$

Por el Teorema 2.57 tenemos $R_{\mathbf{X}}(\mathcal{M}_{\mathbf{X}}(\vec{z})) = M_{\mathbf{X}}(\vec{z}) - 1$, sustituyendo esto obtenemos

$$-(M_{\tilde{\mathbf{X}}}(\vec{z}) - 1)M_{\mathbf{X}}(\mathcal{M}_{\tilde{\mathbf{X}}}(\vec{z})) = M_{\mathbf{X}}(\mathcal{M}_{\tilde{\mathbf{X}}}(\vec{z})) - 1.$$

Despejamos

$$M_{\tilde{\mathbf{X}}}(\vec{z})M_{\mathbf{X}}(\mathcal{M}_{\tilde{\mathbf{X}}}(\vec{z})) = 1,$$

es decir

$$M_{\mathbf{X}}(\mathcal{M}_{\tilde{\mathbf{X}}}(\vec{z})) = \frac{1}{M_{\tilde{\mathbf{X}}}(\vec{z})}. \quad (4.2.1)$$

Recordando la definición de \mathcal{M} tenemos que

$$\mathcal{M}_{\mathbf{X}} \circ \mathcal{M}_{\tilde{\mathbf{X}}}(\vec{z}) = (z_i M_{\tilde{\mathbf{X}}}(\vec{z}) M_{\mathbf{X}}(\mathcal{M}_{\tilde{\mathbf{X}}}(\vec{z})))_{i=1}^n.$$

Juntando las dos ecuaciones anteriores se sigue que

$$\mathcal{M}_{\mathbf{X}} \circ \mathcal{M}_{\tilde{\mathbf{X}}}(\vec{z}) = (z_i M_{\tilde{\mathbf{X}}}(\vec{z}) \frac{1}{M_{\tilde{\mathbf{X}}}(\vec{z})})_{i=1}^n.$$

Se cumple

$$\mathcal{M}_{\mathbf{X}} \circ \mathcal{M}_{\tilde{\mathbf{X}}}(\vec{z}) = \vec{z}. \quad (4.2.2)$$

Ahora, vamos a sustituir \vec{z} por $\mathcal{M}_{\tilde{\mathbf{X}}}(\vec{z})$ en el Teorema 2.57, de modo que obtenemos

$$R_{\mathbf{X}}(\mathcal{M}_{\mathbf{X}}(\mathcal{M}_{\tilde{\mathbf{X}}}(\vec{z}))) = M(\mathcal{M}_{\tilde{\mathbf{X}}}(\vec{z})) - 1.$$

Sustituyendo por lo que obtuvimos en las Ecuaciones 4.2.1 y 4.2.2 obtenemos

$$R_{\mathbf{X}}(\vec{z}) = \frac{1}{M_{\tilde{\mathbf{X}}}(\vec{z})} - 1. \quad (4.2.3)$$

Como del Teorema 2.52 tenemos la relación

$$B_{\tilde{\mathbf{X}}}(\vec{z})M_{\tilde{\mathbf{X}}}(\vec{z}) = M_{\tilde{\mathbf{X}}}(\vec{z}) - 1,$$

obtenemos

$$-B_{\tilde{\mathbf{X}}}(\vec{z}) = \frac{1}{M_{\tilde{\mathbf{X}}}(\vec{z})} - 1,$$

lo cual, junto con la Ecuación 4.2.3, implica

$$-B_{\tilde{\mathbf{X}}}(\vec{z}) = R_{\mathbf{X}}(\vec{z}).$$

Para probar la segunda relación utilizaremos la propiedad de flujo de $\mathcal{M}_{\mathbf{X}}(t, \vec{z})$, para $t = 1$ y $s = -1$, se sigue que

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\mathbf{X}}(0, \vec{z}) &= \mathcal{M}_{\mathbf{X}}(1, \mathcal{M}_{\mathbf{X}}(-1, \vec{z})) \\ \vec{z} &= \mathcal{M}_{\mathbf{X}}(\mathcal{M}_{\mathbf{X}}(-1, \vec{z})). \end{aligned}$$

Se cumple $\mathcal{M}_{\mathbf{X}} \circ \mathcal{M}_{\mathbf{X}(-1)} = Id$ y como $\mathcal{M}_{\mathbf{X}} \circ \mathcal{M}_{\tilde{\mathbf{X}}} = Id$ tenemos que $\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{X}(-1)$, en distribución respecto a ϕ , por lo que:

$$H_n(\tilde{X}_{i_1}, \dots, \tilde{X}_{i_n}) = H_n(X_{i_1}(-1), \dots, X_{i_n}(-1)) = -H_n(X_1, \dots, X_n).$$

□

Utilizando el lema anterior obtenemos la relación cumulantes libres-cumulantes monótonos

$$\begin{aligned} -R_n(X_1, \dots, X_n) &= B_n(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n) = \sum_{\pi \in \mu_{irr}(n)} \frac{1}{|\pi|!} H_\pi(\tilde{X}_1 \dots \tilde{X}_n) \\ &= \sum_{\pi \in \mu_{irr}(n)} \frac{(-1)^{|\pi|-1}}{|\pi|!} H_\pi(X_1, \dots, X_n), \\ R_n(X_1, \dots, X_n) &= \sum_{\pi \in \mu_{irr}(n)} \frac{(-1)^{|\pi|}}{|\pi|!} H_\pi(X_1, \dots, X_n). \end{aligned}$$

Como corolario obtenemos la relación cumulates libres-cumulantes booleanos

$$\begin{aligned} -R_n(X_1, \dots, X_n) &= B_n(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n) = \sum_{\pi \in NC_{irr}(n)} R_\pi(\tilde{X}_1 \dots \tilde{X}_n) \\ &= \sum_{\pi \in NC_{irr}(n)} (-1)^{|\pi|} B_\pi(X_1, \dots, X_n), \\ R_n(X_1, \dots, X_n) &= \sum_{\pi \in NC_{irr}(n)} (-1)^{|\pi|+1} B_\pi(X_1, \dots, X_n) \end{aligned}$$

4.3. Relaciones obtenidas utilizando el polinomio de Tutte

Vamos a asociarle varias gráficas a una partición, podemos visualizar como se construyen estas gráficas observando la representación lineal de π . Para esta sección utilizaremos los resultados del Capítulo 3.

Definición 4.21. Sea $\pi \in P(n)$.

1. Definimos la gráfica de cruce $G(\pi) := (V, E)$ de π , donde el conjunto de vértices $V = \{V_1, \dots, V_{|\pi|}\}$ está indexado por los bloques de π y una arista conecta a los vértices V_i y V_j si y sólo si los bloques se cruzan, es decir, $W = (V_i, V_j) \in (P(V_i \cup V_j) \setminus NC(V_i \cup V_j))$.
2. Definimos la gráfica de antiintervalos $\tilde{G}(\pi) := (V, E)$ de π , donde el conjunto de vértices $V = \{V_1, \dots, V_{|\pi|}\}$ está indexado por los bloques de π y una arista conecta a los vértices V_i y V_j si y sólo si $W = (V_i, V_j) \in (P(V_i \cup V_j) \setminus I(V_i \cup V_j))$.
3. Dada una gráfica $G = (V, E)$ y $\pi \in P(V)$, definimos la función $i(E, \pi)$ como la cantidad de aristas $e \in E$ tales que ambos extremos de e pertenecen a un mismo bloque de π .

Ejemplo 4.22. Consideremos la partición

$$\pi = \{\{1, 3\}, \{2, 5, 8\}, \{4, 6\}\{7, 10\}, \{9, 13\}, \{11, 12\}\{14, 16\}, \{15, 17, 18\}\}.$$

Obtenemos las representaciones



Definición 4.23. Sea $G = (V, E)$ una gráfica y $\pi \in P(V)$ una partición. Definimos $i(E, \pi)$ como la cantidad de aristas que tienen ambos extremos en un mismo bloque de π .

El siguiente teorema fue demostrado en [6]. Vamos a utilizar el polinomio de Tutte de la Definición 3.24

Teorema 4.24. Sea $G = (V, E)$ una gráfica. Se cumple

$$\frac{1}{(q-1)^{|V|-1}} \sum_{\pi \in P(V)} q^{i(E, \pi)} \mu_P(\pi, \hat{1}) = \begin{cases} T(G; 1, q), & \text{si } G \text{ es conexa,} \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

con la convención de que $q^0 = 1$ para $q = 0$.

Demostración. Llamemos U_G al lado izquierdo de la igualdad. Vamos a probar que el lado izquierdo cumple la recurrencia del polinomio de Tutte.

Sea e un lazo, entonces se cumple que $i(E, \pi) - 1 = i(E \setminus \{e\}, \pi)$. Se tiene

$$\frac{1}{(q-1)^{|V(G)|-1}} \sum_{\pi \in P(v)} q^{i(E, \pi)} \mu_P(\pi, \hat{1}) = q \left[\frac{1}{(q-1)^{|V(G)|-1}} \sum_{\pi \in P(v)} q^{i(E \setminus \{e\}, \pi)} \mu_P(\pi, \hat{1}) \right].$$

Si e es un lazo, se cumple $U_G = qU_{G/e}$. Supongamos que e no es un lazo, entonces se tiene

$$U_G - U_{G \setminus e} = \frac{1}{(q-1)^{|V(G)|-1}} \sum_{\pi \in P(V)} [q^{i(E, \pi)} - q^{i(E \setminus e, \pi)}] \mu_P(\pi, \hat{1}).$$

En la suma se cancela el coeficiente de todos los π en los que ambos extremos de e no se encuentran en un mismo bloque de π . Si ambos extremos se encuentran en un mismo bloque, podemos asignarle a π una partición $\hat{\pi} \in P(V(G/e))$ tal que identificamos ambos extremos de e en un mismo elemento de $\hat{\pi}$. En ese caso se tiene $i(E, \pi) = i(E/e, \pi) + 1$ y además $\mu_P(\pi, \hat{1}_{|V|}) = \mu_P(\hat{\pi}, \hat{1}_{|V(G/e)|})$. Se cumple

$$\begin{aligned} U_G - U_{G \setminus e} &= \frac{1}{(q-1)^{|V(G)|-1}} \sum_{\hat{\pi} \in P(V(G/e))} q^{i(E/e, \pi)} [q-1] \mu_P(\hat{\pi}, \hat{1}) \\ &= \frac{1}{(q-1)^{|V(G/e)|-1}} \sum_{\hat{\pi} \in P(V(G/e))} q^{i(E/e, \hat{\pi})} \mu_P(\hat{\pi}, \hat{1}) \\ &= U_{G/e}. \end{aligned}$$

Siempre que e no sea lazo se cumple $U_G = U_{G \setminus e} + U_{G/e}$.

Para concluir, podemos calcular U_G recursivamente borrando y contrayendo aristas hasta que obtengamos una suma de U_H 's con distintos coeficientes, tales que H es una gráfica sin aristas. Si G no es conexa, entonces no podemos obtener un sólo vértice al contraer y borrar aristas de G . Notemos que si H es una gráfica sin aristas y más de un vértice, entonces $i(E(H), \pi) = 0$ siempre, por lo que

$$U_H = \frac{1}{(q-1)^{|V(H)|-1}} \left[\sum_{\pi \in P(V(H))} \mu_P(\pi, \hat{1}) \right],$$

como $|V(H)| > 1$, por la definición de la función de Möbius obtenemos $U_H = 0$. \square

Teorema 4.25. *Sea (\mathcal{A}, ϕ) un EPNC, sea $(X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{A}^n$. Se cumple la relación*

$$K_n(X_1, \dots, X_n) = \sum_{\pi \in P_{irr}(n)} (-1)^{|\pi|-1} T(\tilde{G}(\pi); 1, 0) B_\pi(X_1, \dots, X_n).$$

Demostración. Utilizando la relación entre cumulantes clásicos y momentos obtenemos

$$K_n = \sum_{\pi \in P(n)} \mu(\pi, \hat{1}_n) M_\pi.$$

Sustituyendo con la relación entre momentos y cumulantes booleanos, se obtiene

$$\begin{aligned} K_n &= \sum_{\sigma, \pi \in P(n), \sigma \preceq \pi} \mu(\pi, \hat{1}_n) B_\sigma \\ &= \sum_{\sigma \in P(n)} B_\sigma \left(\sum_{\pi \succeq \sigma} \mu_P(\pi, \hat{1}_n) \right), \end{aligned}$$

donde escribimos $\pi \succeq \sigma$ cuando $\pi \geq \sigma$ y se cumple que la restricción $\sigma|_W \in P(W)$ es una partición por intervalos para todo bloque $W \in \pi$.

Tomemos un $\sigma \in P(n)$ fijo y consideremos su gráfica de antiintervalos $\tilde{G}(\pi)$. Existe una biyección $\pi \rightarrow \tilde{\pi}$ entre las particiones $\{\pi : \pi \geq \sigma\}$ y las particiones $\tilde{\pi} \in P(V)$: Una partición $\pi \geq \sigma$ se obtiene pegando algunos bloques de σ , tomamos $\tilde{\pi}$ como la partición que pone en un mismo bloque los vértices de bloques de σ pegados en π .

En el Teorema 4.24 para $q = 0$, observamos que $i(E, \tilde{\pi}) = 0$ sólo para aquellos $\pi \geq \sigma$ tales que $\pi \succeq \sigma$. Como se tiene $|\pi| = |\tilde{\pi}|$, tenemos $\mu_P(\pi, \hat{1}_n) = \mu_P(\tilde{\pi}, \hat{1}_{|\sigma|})$. Obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{\pi \succeq \sigma} \mu_P(\pi, \hat{1}_n) &= \sum_{\pi \geq \sigma} 0^{i(E, \pi)} \mu_P(\pi, \hat{1}_n) \\ &= \sum_{\tilde{\pi} \in P(V)} 0^{i(E, \tilde{\pi})} \mu_P(\tilde{\pi}, \hat{1}_{|\sigma|}). \end{aligned}$$

Juntando esto con el Teorema 4.24 obtenemos

$$\sum_{\pi \succeq \sigma} \mu_P(\pi, \hat{1}_n) = \begin{cases} T(\tilde{G}(\pi); 1, q), & \text{si } \tilde{G}(\pi) \text{ es conexa,} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Como $\tilde{G}(\pi)$ es conexa sólo para $\pi \in P_{irr}(n)$, concluimos la prueba del teorema. \square

De manera semejante tenemos el siguiente teorema.

Teorema 4.26. *Sea (\mathcal{A}, ϕ) un EPNC, sea $(X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{A}^n$. se cumple la relación*

$$K_n(X_1, \dots, X_n) = \sum_{\pi \in P_{con}(n)} (-1)^{|\pi|-1} T(G(\pi); 1, 0) R_\pi(X_1, \dots, X_n).$$

La prueba de este teorema es análoga a la del teorema anterior y se omitirá.

Capítulo 5

Sobre la fórmula de cumulantes clásicos a cumulantes monótonos

En el artículo Arizmendi et. al. [5] se deja abierto el problema de dar una fórmula para los cumulantes monótonos en términos de los cumulantes clásicos. En este artículo se muestra que existe una fórmula del tipo

$$K_n(X_1, \dots, X_n) = \sum_{\pi \in P(n)} \beta(\pi) H_\pi(X_1, \dots, X_n),$$

dónde los coeficientes $\beta(\pi)$ dependen de una gráfica dirigida asociada a π , $\vec{G}(\pi)$, que sólo depende de cuáles bloques se anidan y cuáles se intersecan. En este sentido, se espera que $\beta(\pi)$ coincida con alguna evaluación de un polinomio similar al polinomio de Tutte, $\beta(\vec{G}(\pi))$.

En la Sección 1 de este capítulo revisaremos las observaciones en [5] y en la Sección 2 mostraremos dos resultados nuevos, Teorema 5.14 y Teorema 5.17, acerca de propiedades recursivas de $\beta(\vec{G})$ y sus polinomios asociados.

5.1. Resultados previos

Vamos a intentar utilizar el mismo procedimiento que utilizamos para la relación entre cumulantes clásicos y cumulantes libres (o booleanos). Para esto definimos una gráfica dirigida que contiene la información de la gráfica de anti-intervalos y la gráfica de cruce. Sin embargo, no es directo cómo transferir la información de esta gráfica a los coeficientes $\beta(\pi)$.

Definición 5.1. Sea $\pi \in P(n)$, la gráfica de anti-intervalos dirigida $\vec{G}(\pi)$ se

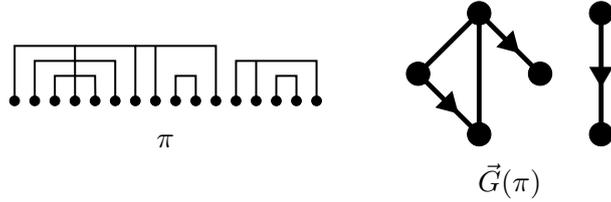
define a partir de la gráfica de anti-intervalos de π , reemplazando cada arista (V_i, V_j) de $\tilde{G}(\pi)$ por

1. Una arista dirigida (V_i, V_j) si se cumple $V_i > V_j$.
2. Una arista dirigida (V_j, V_i) si se cumple $V_j > V_i$.
3. Una arista no dirigida $\{V_i, V_j\}$ en otro caso (eso sucede si V_i y V_j tienen un cruce).

Ejemplo 5.2. Consideremos

$$\pi = \{\{1, 4, 7, 8, 11\}, \{2, 6\}, \{3, 5\}, \{9, 10\}, \{12, 13, 16\}, \{14, 15\}\},$$

entonces su gráfica dirigida de anti-intervalos es



Ahora, intentando despejar K_n en términos de H_π de las relaciones cumulante-momento obtenemos

$$\begin{aligned} K_n &= \sum_{\sigma \in P(n)} \mu_P(\sigma, \hat{1}_n) M_\sigma, \\ &= \sum_{\sigma \in P(n)} \prod_{V \in \sigma} \left(\sum_{\pi_V \in NC(|V|)} \frac{\mu_P(\sigma, \hat{1}_n)}{\tau(\pi_V)!} H_{\pi_V} \right). \end{aligned}$$

Dados $\pi, \sigma \in P(n)$, tomemos la relación $\sigma \triangleright \pi$ si se cumple que $\sigma \geq \pi$ y se cumple que la restricción $\pi|_W \in P(W)$ es una partición que no se cruza para todo bloque $W \in \sigma$. Para $\sigma \triangleright \pi$ escribimos

$$\tau(\pi|\sigma)! := \prod_{V \in \sigma} \tau(\pi|V)!.$$

Utilizando esta notación obtenemos

$$\begin{aligned} K_n &= \sum_{\sigma \in P(n)} \left(\sum_{\sigma \triangleright \pi} \frac{1}{\tau(\pi|\sigma)!} \mu_P(\pi, \hat{1}_n) H_\sigma \right) \\ &= \sum_{\pi \in P(n)} H_\pi \sum_{\sigma \triangleright \pi} \frac{\mu_P(\sigma, \hat{1}_n)}{\tau(\pi|\sigma)!}. \end{aligned}$$

Con esto, tomando

$$\beta(\pi) = \sum_{\sigma \triangleright \pi} \frac{\mu_P(\sigma, \hat{1}_n)}{\tau(\pi|\sigma)},$$

se cumple

$$K_n = \sum_{\pi \in P(n)} \beta(\pi) H_\pi.$$

Nuestro objetivo es dar una fórmula recursiva para $\beta(\pi)$.

Los autores en [5] mostraron las siguientes propiedades de $\beta(\pi)$.

Teorema 5.3.

1. Si π es reducible, entonces $\beta(\pi) = 0$.
2. Si π es irreducible y no tiene anidamientos, entonces $\beta(\pi)$ coincide con el coeficiente $(-1)^{|\pi|-1} T(G(\pi); 1, 0)$ del Teorema 4.26.
3. Si $\pi \in NC_{irr}$ y tiene profundidad 1 o 2, entonces $\beta(\pi) = \frac{(-1)^{|\pi|-1}}{|\pi|}$.

La propiedad 1 será consecuencia de 5.14. La propiedad 2 se sigue del hecho de que la fórmula cumulantés clásicos-libres tiene la misma fórmula para los π tales que son irreducibles y no tienen anidamientos, porque cualquier etiquetado da una partición ordenada. La propiedad 3 no se probará por no ser de interés central en esta tesis.

Ahora veremos que $\beta(\pi)$ sólo depende de la gráfica dirigida de anti-intervalos. Para esto, tomemos un $\pi \in P(n)$ fijo y consideremos su gráfica de anti-intervalos dirigida $\vec{G}(\pi)$. Existe una biyección $\sigma \rightarrow \tilde{\sigma}$ entre las particiones $\{\sigma : \sigma \geq \pi\}$ y las particiones $\tilde{\sigma} \in P(V)$: una partición σ con $\sigma \geq \pi$ se obtiene pegando algunos bloques de π , tomamos $\tilde{\sigma} \in P(V)$ como la partición que une en un mismo bloque los vértices asociados a los bloques de π pegados en σ .

Extenderemos la función $i(E, \pi)$ de la Definición 4.21, de modo que $i(E, \tilde{\sigma})$ es el número de aristas no dirigidas que tienen ambos extremos en un mismo bloque de $\tilde{\sigma}$. Observamos que $i(E, \tilde{\sigma}) = 0$ sólo para aquellos σ tales que $\pi \triangleright \sigma$. Como se tiene $|\sigma| = |\tilde{\sigma}|$, tenemos $\mu_P(\sigma, \hat{1}_n) = \mu_P(\tilde{\sigma}, \hat{1}_{|\pi|})$.

Utilizando lo anterior obtenemos que si V es el conjunto de vértices de la gráfica de anti-intervalos dirigida $\vec{G}(\pi)$ y E su conjunto de aristas, entonces

$$\beta(\pi) = \sum_{\tilde{\sigma} \in P(V)} 0^{i(E, \tilde{\sigma})} \frac{\mu_P(\tilde{\sigma}, \hat{1}_{|V|})}{\tau(\pi|\tilde{\sigma})}.$$

5.2. Nuevos resultados

En esta última parte presentamos nuevos avances hacia la fórmula final, obtenidos como parte de este trabajo, los cuales no han sido reportados en la literatura anteriormente.

El Teorema 5.14 es una propiedad recursiva que cumple uno de los polinomios que definimos para gráficas con aristas dirigidas y no dirigidas al borrar puentes. Nos permite reducir nuestro problema de interés a calcular $\beta(\pi)$ cuando $\vec{G}(\pi)$ no tiene puentes.

El Teorema 5.17 es una propiedad recursiva que cumple el otro de los polinomios que asociamos a gráficas con aristas dirigidas y no dirigidas. Nos permite calcular el polinomio asociado a una gráfica con una arista no dirigida fija en términos del polinomio asociado a la gráfica que se obtiene al borrar la arista fija o al sustituirla por una de sus dos posibles versiones dirigidas.

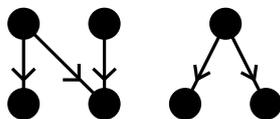
Para obtener estos resultados, se definieron dos polinomios para gráficas dirigidas y se realizó una búsqueda empírica usando un programa en el lenguaje de programación C^{++} . Con esto se plantearon conjeturas que después se lograron demostrar.

Recordemos que un etiquetado de una gráfica es una función $f : V(\vec{G}) \rightarrow [k]$ para algún k natural.

Definición 5.4. Sea $\vec{G} = (V, E)$ una gráfica dirigida tal que si cambiamos las aristas dirigidas por aristas no dirigidas obtenemos una gráfica conexa. Por etiquetado creciente de \vec{G} nos referimos a un etiquetado con $k = |V(\vec{G})|$, que es biyectivo y que cumple que si $(u, v) \in E$ entonces $f(u) > f(v)$. Definimos $m_1(\vec{G})$ como la cantidad de etiquetados crecientes de \vec{G} .

Dada cualquier gráfica dirigida \vec{G} , definimos $m_1(\vec{G})$ como la extensión multiplicativa a componentes de \vec{G}

Ejemplo 5.5. Para \vec{G}



Se obtiene $m_1(\vec{G}) = 5 \cdot 2$.

Definición 5.6. Dada $\vec{G} = (V, E)$ una gráfica dirigida y una partición $\sigma \in P(V)$. Definimos $\vec{G}|\sigma$ como la gráfica que se obtiene con el mismo conjunto de vértices y tomando sólo las aristas cuyos extremos se encuentran en un mismo bloque de σ .

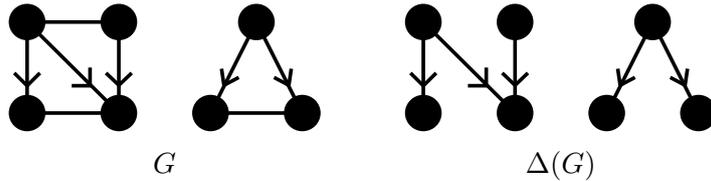
Definición 5.7. Para una gráfica dirigida $\vec{G} = (V, E)$, conexa al cambiar las aristas dirigidas por no dirigidas, definimos $|\vec{G}|!$ como $|V|!$. Extendemos la definición de $|\vec{G}|!$ para toda gráfica como la función mutiplicativa por componentes de \vec{G} .

Para el ejemplo anterior tenemos $|\vec{G}|! = 4!3!$.

Observación 5.8. Dada una partición $\pi \in NC(n)$, de los dos resultados en el Lema 2.39, tenemos que se cumple

$$\frac{m_1(\Delta(\vec{G}))}{|\Delta(G)|!} = \frac{1}{\tau(\pi)!} = \frac{m(\pi)}{|\pi|!}.$$

Definición 5.9. Dada una gráfica G con aristas dirigidas y no dirigidas, definimos $\Delta(G)$ como la gráfica con los mismos vértices pero en la que sólo consideramos las aristas dirigidas.



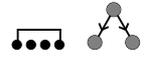
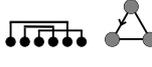
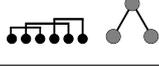
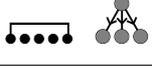
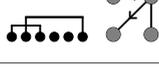
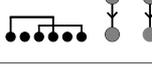
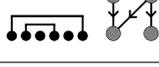
Las definiciones anteriores nos permiten definir el polinomio de nuestro interés.

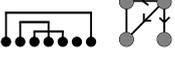
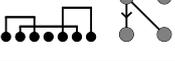
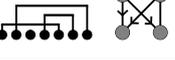
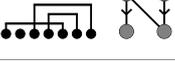
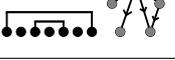
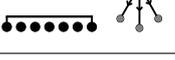
Definición 5.10. Dada una gráfica G con aristas dirigidas y no dirigidas, definimos el polinomio $P(G; q)$ con la fórmula

$$P(G; q) = \sum_{\sigma \in \mathcal{P}(V(G))} q^{i(E, \sigma)} \frac{m_1(\Delta(G)|\sigma)}{|\Delta(G)|\sigma!} \mu_P(\sigma, \hat{1}).$$

Al tomar $q = 0$ no se consideran las aristas no dirigidas. En tal caso, recordando del Lema 2.39, tenemos que $\frac{m_1(\Delta(G)|\sigma)}{|\Delta(G)|\sigma!} = \frac{1}{\tau(\pi|\sigma)!}$. Tenemos que el coeficiente constante de nuestro polinomio es $\beta(\pi)$.

Las siguientes tablas muestran los coeficientes $\beta(\pi)$ y sus respectivos $P(G; q)$, para las posibles particiones hasta siete elementos, reducidas a un representante por gráfica asociada.

| | | | | | |
|--|------------------|-------------------------------|--|-----------------|------------------------------------|
|  | 1 | 1 |  | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ |
|  | -1 | $-1 + q$ |  | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |
|  | 1 | $1 - \frac{2}{3}q$ |  | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2} - \frac{q}{2}$ |
|  | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ |  | $\frac{3}{2}$ | $\frac{3}{2} - 2q + \frac{q^2}{2}$ |
|  | 1 | $1 - \frac{2}{3}q$ |  | 2 | $2 - 3q + q^3$ |
|  | 1 | $1 - 2q + q^2$ |  | $-\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{4}$ |
|  | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}q$ |  | $-\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}q$ |
|  | $-\frac{11}{24}$ | $-\frac{11}{24}$ |  | $-\frac{7}{12}$ | $-\frac{7}{12} + \frac{5}{12}q$ |

| | | | | | |
|---|------------------|--|--|------------------|---|
|  | $-\frac{11}{12}$ | $-\frac{11}{12}$ |  | $-\frac{7}{6}$ | $-\frac{7}{6} + \frac{7}{12}q$ |
|  | -2 | $-2 + \frac{8}{3}q - \frac{2}{3}q^3$ |  | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2} + q - \frac{1}{2}q^2$ |
|  | $-\frac{2}{3}$ | $-\frac{2}{3} + \frac{5}{12}q$ |  | $-\frac{11}{6}$ | $-\frac{11}{6} + \frac{5}{24}q$ |
|  | -1 | $-1 + \frac{3}{2}q - \frac{1}{2}q^3$ |  | -1 | $-1 + \frac{5}{3}q - \frac{2}{3}q$ |
|  | $-\frac{5}{4}$ | $-\frac{5}{4} + \frac{19}{24}q$ |  | $-\frac{11}{6}$ | $-\frac{11}{6} + \frac{11}{12}q$ |
|  | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2} + q - \frac{1}{2}q^2$ |  | $-\frac{2}{3}$ | $-\frac{2}{3} + \frac{2}{3}q$ |
|  | $-\frac{29}{12}$ | $-\frac{29}{12} + \frac{7}{3}q - \frac{3}{8}q^2$ |  | $-\frac{19}{12}$ | $-\frac{19}{12} + \frac{5}{3}q - \frac{7}{24}q^2$ |
|  | $-\frac{3}{4}$ | $-\frac{3}{4} + q - \frac{1}{4}q^2$ |  | $\frac{5}{12}$ | $\frac{5}{12} - \frac{4}{15}q$ |
|  | $\frac{13}{10}$ | $\frac{13}{10}$ |  | $\frac{7}{20}$ | $\frac{7}{20}$ |
|  | $\frac{3}{2}$ | $\frac{3}{2} - \frac{2}{5}q$ |  | $\frac{13}{20}$ | $\frac{13}{20}$ |
|  | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4} - \frac{1}{4}q$ |  | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3} - \frac{1}{5}q$ |
|  | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6} - \frac{1}{6}q$ |  | $-\frac{1}{6}$ | $-\frac{1}{6}$ |

Definición 5.11. Dada una gráfica $G = (V, E)$ con aristas dirigidas y no dirigidas y una partición $\pi \in P(V)$, definimos $j(E, \pi)$ como la cantidad de aristas dirigidas con ambos extremos en un mismo bloque de π

Definición 5.12. Dada una gráfica $G = (V, E)$ con aristas dirigidas y no dirigidas, definimos el polinomio en dos variables

$$Q(G; t, q) := \sum_{\tilde{\sigma} \in P(V)} t^{j(E, \tilde{\sigma})} q^{i(E, \tilde{\sigma})} \frac{m(\Delta(G)|\sigma)}{|\Delta(G)|\sigma!} \mu_P(\tilde{\sigma}, \hat{1}_{|V|}).$$

En el apéndice pueden encontrarse los cálculos de los polinomios $Q(G; t, q)$ para gráficas de anti-intervalos de algunas particiones.

Observación 5.13. Se cumple

$$Q(G; t, q) = P(G; q).$$

El siguiente teorema es una de las aportaciones principales de esta tesis.

Teorema 5.14. *Sea $G = (V, E)$ una gráfica con aristas dirigidas y no dirigidas, sea $e \in E$ un puente no dirigido. Sean $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ las componentes que quedan al borrar e de nuestra gráfica. Se cumple*

$$Q(G; t, q) = (q - 1)Q(G_1; t, q)Q(G_2; t, q)$$

Para la demostración de este teorema, utilizaremos el siguiente lema combinatorio.

Lema 5.15. *Sean n, m enteros fijos. Entonces se cumple*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+m-k}{k, m-k, n-k} (-1)^k = 1.$$

Demostración. Vamos a proceder la demostración por doble conteo. Consideremos los vectores $v \in \{0, 1\}^{n+m}$ con n entradas 0 y m entradas 1, tales que la subsecuencia de un 0 seguido inmediatamente por un 1, es decir $\dots, 0, 1, \dots$, no aparezca.

Por un lado, para que eso suceda no puede haber un 0 antes de que aparezcan todas las entradas 1, por lo que esto nos dice que sólo existe un vector que cumple las condiciones y es $v = (1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots, 0)$.

Por otro lado, utilizaremos el método de inclusión-exclusión. Hay $\binom{n+m}{m}$ vectores con n entradas 0 y m entradas 1; restamos las formas en las que aparece al menos una vez la subsecuencia $(0, 1)$, que es $\binom{n+m-1}{1, m-1, n-1}$; luego sumamos en las que aparece al menos dos veces la subsecuencia $(0, 1)$ y procedemos inductivamente. Con este procedimiento obtenemos el lado izquierdo de la igualdad y concluimos la demostración por doble conteo. \square

Demostración del Teorema. El teorema es equivalente a demostrar que

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma \in P(V(G))} t^{j(E,\sigma)} q^{i(E,\sigma)} \frac{m(G|\sigma)}{|G|\sigma!} \mu_P(\sigma, \hat{1}) \\ &= (q-1) \left[\sum_{\sigma_1 \in P(V_1)} t^{j(E_1,\sigma_1)} q^{i(E_1,\sigma_1)} \frac{m(\Delta(G_1)|\sigma_1)}{|\Delta(G_1)|\sigma_1!} \mu_P(\sigma_1, \hat{1}) \right] \\ & \quad \cdot \left[\sum_{\sigma_2 \in P(V_2)} t^{j(E_2,\sigma_2)} q^{i(E_2,\sigma_2)} \frac{m(\Delta(G_2)|\sigma_2)}{|\Delta(G_2)|\sigma_2!} \mu_P(\sigma_2, \hat{1}) \right]. \end{aligned}$$

Tomemos σ_1 y σ_2 fijos en la suma anterior y supongamos $|\sigma_1| \geq |\sigma_2|$. Si σ es una partición de V , esta induce una partición en V_1 y una en V_2 . Nos interesan en particular los σ que inducen σ_1 y σ_2 al mismo tiempo. Si dos bloques de σ_1 estuviesen contenidos en un mismo bloque de σ , entonces al inducir σ_1 de ambos bloques obtendríamos uno, lo que sería una contradicción. Sucede lo mismo con σ_2 . Obtenemos que cada bloque de σ debe ser o bien un bloque de σ_1 , un bloque de σ_2 o un bloque que une a un bloque de σ_1 y uno de σ_2 . Llamemos $\Lambda(\sigma_1, \sigma_2)$ al conjunto de particiones $\sigma \in P(n)$ que inducen a σ_1 y σ_2 .

Observemos que para $\sigma \in \Lambda(\sigma_1, \sigma_2)$, se cumple

$$j(E, \sigma) = j(E_1, \sigma_1) + j(E_2, \sigma_2).$$

Como $m(\Delta(G)|\sigma)$, $t^{j(E,\sigma)}$, $q^{i(E,\sigma)}$, $|\Delta(G)|\sigma!$ son multiplicativas, se tiene que

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma \in \Lambda(\sigma_1, \sigma_2)} t^{j(E,\sigma)} q^{i(E,\sigma)} \frac{m(\Delta(G)|\sigma)}{|\Delta(G)|\sigma!} \mu_P(\sigma, \hat{1}) \\ &= \left[t^{j(E_1,\sigma_1)} q^{i(E_1,\sigma_1)} \frac{m(\Delta(G_1)|\sigma_1)}{|\Delta(G_1)|\sigma_1!} \right] \left[t^{j(E_2,\sigma_2)} q^{i(E_2,\sigma_2)} \frac{m(\Delta(G_2)|\sigma_2)}{|\Delta(G_2)|\sigma_2!} \right] \left[\sum_{\sigma \in \Lambda(\sigma_1, \sigma_2)} \mu_P(\sigma, \hat{1}_{|V|}) \right]. \end{aligned}$$

Tomamos los extremos de $e = \{u, v\}$ como $u \in V_1$ y $v \in V_2$. Tenemos que si ambos extremos de $\{u, v\}$ se encuentran en el mismo bloque de σ , entonces se cumple $i(E, \sigma) = i(E_1, \sigma_1) + i(E_2, \sigma_2) + 1$. En dado caso tenemos que los respectivos bloques de σ_1 y σ_2 se encuentran emparejados en un mismo bloque de σ . Llamemos $\Lambda_1(\sigma_1, \sigma_2)$ al conjunto de particiones $\sigma \in P(n)$ que inducen a σ_1 y σ_2 , tales que u y v pertenecen a un mismo bloque.

Notemos que hay $\binom{|\sigma_1|-1}{k} \binom{|\sigma_2|-1}{k} k!$ maneras de emparejar k de los $|\sigma_1| - 1$ bloques de σ_1 con k de los $|\sigma_2| - 1$ bloques de σ_2 restantes. Tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{\sigma \in \Lambda_1(\sigma_1, \sigma_2)} \mu_P(\sigma, \hat{1}_{|V|}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{|\sigma_1| - 1}{k} \binom{|\sigma_2| - 1}{k} k! (|\sigma_1| + |\sigma_2| - k - 2)! (-1)^{|\sigma_1| + |\sigma_2| - 2 - k} \\
&= \sum_{k=0}^{|\sigma_1| - 1} \frac{(|\sigma_1| - 1)! (|\sigma_2| - 1)! (|\sigma_1| + |\sigma_2| - 2 - k)!}{k! (|\sigma_1| - k - 1)! (|\sigma_2| - k - 1)!} (-1)^{|\sigma_1| + |\sigma_2| - 2 - k}.
\end{aligned}$$

Factorizando obtenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{\sigma \in \Lambda_1(\sigma_1, \sigma_2)} \mu_P(\sigma, \hat{1}_{|V|}) &= (|\sigma_1| - 1)! (-1)^{|\sigma_1| - 1} (|\sigma_2| - 1)! (-1)^{|\sigma_2| - 1} \\
&\quad \cdot \sum_{k=0}^{|\sigma_1| - 1} \frac{(|\sigma_1| + |\sigma_2| - 2 - k)!}{k! (|\sigma_1| - k - 1)! (|\sigma_2| - k - 1)!} (-1)^k.
\end{aligned}$$

Por el Lema 5.15 tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{|\sigma_1| - 1} \frac{(|\sigma_1| + |\sigma_2| - 2 - k)!}{k! (|\sigma_1| - k - 1)! (|\sigma_2| - k - 1)!} (-1)^k &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{|\sigma_1| + |\sigma_2| - 2 - k}{k, |\sigma_1| - 1 - k, |\sigma_2| - 1 - k} (-1)^k \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Así que tenemos

$$\sum_{\sigma \in \Lambda_1(\sigma_1, \sigma_2)} \mu_P(\sigma, \hat{1}_{|V|}) = \mu_P(\sigma_1, \hat{1}_{|V_1|}) \mu_P(\sigma_2, \hat{1}_{|V_2|})$$

Ahora, denotemos por $\Lambda_2(\sigma_1, \sigma_2)$ al conjunto de particiones que inducen a σ_1 y σ_2 pero tales que u y v no pertenecen a un mismo bloque.

Vamos a tomar el bloque de σ_1 que contiene a u . Existen dos posibles casos para σ , que es que dicho bloque esté o no emparejado con un bloque de σ_2 distinto del bloque de v . Si contamos cuantos de dichos emparejamientos hay, obtenemos

$$\begin{aligned}
&\sum_{\sigma \in \Lambda_2(\sigma_1, \sigma_2)} \mu_P(\sigma, \hat{1}_{|V|}) = \\
&\sum_{k=0}^{\infty} (|\sigma_2| - 1) \binom{|\sigma_1| - 1}{k} \binom{|\sigma_2| - 1}{k} k! (|\sigma_1| + |\sigma_2| - k - 2)! (-1)^{|\sigma_1| + |\sigma_2| - k - 2} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{\infty} \binom{|\sigma_1| - 1}{k} \binom{|\sigma_2|}{k} k! (|\sigma_1| + |\sigma_2| - k - 1)! (-1)^{|\sigma_1| + |\sigma_2| - k - 1}.
\end{aligned}$$

Factorizando obtenemos

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma \in \Lambda_2(\sigma_1, \sigma_2)} \mu_P(\sigma, \hat{1}_{|V|}) = \\ & [|\sigma_2| - 1] \cdot [\mu_P(\sigma_1, \hat{1}_{|V_1|}) \mu_P(\sigma_2, \hat{1}_{|V_2|})] \cdot \left[\sum_{k=0}^{|\sigma_1|-1} \frac{(|\sigma_1| + |\sigma_2| - 2 - k)!}{k!(|\sigma_1| - k - 1)!(|\sigma_2| - k - 1)!} (-1)^k \right] \\ & + [-|\sigma_2|] \cdot [\mu_P(\sigma_1, \hat{1}_{|V_1|}) \mu_P(\sigma_2, \hat{1}_{|V_2|})] \cdot \left[\sum_{k=0}^{|\sigma_1|-1} \frac{(|\sigma_1| + |\sigma_2| - 1 - k)!}{k!(|\sigma_1| - k - 1)!(|\sigma_2| - k)!} (-1)^k \right] \end{aligned}$$

Utilizamos dos veces el Lema 5.15 y obtenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \Lambda_2(\sigma_1, \sigma_2)} \mu_P(\sigma, \hat{1}) &= \mu_P(\sigma_1, \hat{1}_{|V_1|}) \mu_P(\sigma_2, \hat{1}_{|V_2|}) [|\sigma_2| - 1 - |\sigma_2|] \\ &= -\mu_P(\sigma_1, \hat{1}_{|V_1|}) \mu_P(\sigma_2, \hat{1}_{|V_2|}). \end{aligned}$$

Al separar las particiones de la suma en la definición de $Q(G; t, q)$, de acuerdo a las particiones que inducen, obtenemos el resultado. \square

Corolario 5.16. *En la prueba anterior, si tenemos al menos dos componentes conexas distintas en nuestra gráfica, podemos realizar el mismo procedimiento con σ_1 y σ_2 fijos. Como en ambos casos no cambia $i(E, \sigma)$, obtenemos que $Q(G; t, q) = 0$.*

Obtenemos que

$$\beta(\pi) = P(\vec{G}(\pi); 0) = Q(\vec{G}(\pi); 1, 0) = 0,$$

siempre que $\vec{G}(\pi)$ no sea conexa, qes decir, siempre que π no sea una partición irreducible.

El segundo teorema nos permite reducir el cálculo del polinomio $P(G; q)$ para gráficas generales a calcular éste sólo para gráficas con aristas dirigidas.

Teorema 5.17. *Sea $G = (V, E)$ una gráfica con aristas dirigidas y no dirigidas. Sea $e = \{u, v\} \in E$ una arista no dirigida. Sea $G_1 = (V, E_1)$ la gráfica que se obtiene al sustituir e por la arista dirigida (u, v) y $G_2 = (V, E_2)$ la gráfica que se obtiene al sustituir e por la arista dirigida (v, u) . Se cumple*

$$P(G; q) = (2q - 1)P(G \setminus e; q) + (1 - q)(P(G_1; q) + P(G_2; q)).$$

Demostración. Si tenemos una partición $\sigma \in P(V)$ tal que u y v no están en el mismo bloque, entonces se cumple

$$q^{i(E,\sigma)} \frac{m_1(\Delta(G)|\sigma)}{|\Delta(G)|\sigma|!} \mu_P(\sigma, \hat{1}) = q^{i(E \setminus e, \sigma)} \frac{m_1(\Delta(G \setminus e)|\sigma)}{|\Delta(G \setminus e)|\sigma|!} \mu_P(\sigma, \hat{1}).$$

Si no se cumple $u \sim_\sigma v$, entonces $i(E, \sigma) = 1 + i(E \setminus e, \sigma)$, por lo que tenemos

$$P(G; q) - P(G \setminus e; q) = (q-1) \sum_{\substack{\sigma \in P(n), \\ u \sim_\sigma v}} q^{i(E \setminus e, \sigma)} \frac{m_1(\Delta(G \setminus e)|\sigma)}{|\Delta(G \setminus e)|\sigma|!} \mu_P(\sigma, \hat{1}) \quad (5.2.1)$$

Notemos de nuevo que si tenemos una partición $\sigma \in P(v)$ tal que u y v no están en el mismo bloque, entonces se cumple

$$q^{i(E_1, \sigma)} \frac{m_1(\Delta(G_1)|\sigma)}{|\Delta(G_1)|\sigma|!} \mu_P(\sigma, \hat{1}_{|V|}) = q^{i(E_2, \sigma)} \frac{m_1(\Delta(G_2)|\sigma)}{|\Delta(G_2)|\sigma|!} \mu_P(\sigma, \hat{1}_{|V|}) \quad (5.2.2)$$

$$= q^{i(E \setminus e, \sigma)} \frac{m_1(\Delta(G \setminus e)|\sigma)}{|\Delta(G \setminus e)|\sigma|!} \mu_P(\sigma, \hat{1}_{|V|}). \quad (5.2.3)$$

Si tenemos una partición $\sigma \in P(v)$ tal que u y v están en un mismo bloque, existen dos casos:

Caso 1: El número de componentes de $\Delta(G_1)|\sigma$ es uno menos que el número de componentes de $\Delta(G \setminus e)|\sigma$.

Supongamos que k_1 es la componente en la que se encuentra u y k_2 es la componente en la que se encuentra v . Dado un etiquetado monótono de $\Delta(G)|\sigma$, cambiamos las etiquetas de k_1 tomando $|k_1|$ números de $[|k_1| + |k_2|]$ y respetando el orden anterior de las etiquetas. Cambiamos las etiquetas de k_2 tomando las que no usamos en k_1 y respetando el orden anterior de las etiquetas. Al hacer esto, obtenemos un etiquetado monótono de G_1 o de G_2 dependiendo de cual etiqueta es mayor entre la etiqueta de u o la de v . Se verifica que

$$\begin{aligned} m(\Delta(G_1)|\sigma) + m(\Delta(G_2)|\sigma) &= \binom{|k_1| + |k_2|}{|k_1|} m(\Delta(G)|\sigma) \\ &= \frac{(|k_1| + |k_2|)!}{|k_1|! |k_2|!} m(\Delta(G)|\sigma), \end{aligned}$$

que nos dice que

$$\frac{m(\Delta(G_1)|\sigma) + m(\Delta(G_2)|\sigma)}{(|k_1| + |k_2|)!} = \frac{m(\Delta(G)|\sigma)}{|k_1|! |k_2|!}.$$

Como el resto de las componentes son iguales para $\Delta(G)|\sigma$, $\Delta(G_1)|\sigma$ y $\Delta(G_2)|\sigma$, tenemos que

$$\frac{m_1(\Delta(G_1)|\sigma)}{|\Delta(G_1)|\sigma|!} + \frac{m_1(\Delta(G_2)|\sigma)}{|\Delta(G_2)|\sigma|!} = \frac{m_1(\Delta(G)|\sigma)}{|\Delta(G)|\sigma|!}$$

Caso 2: El número de componentes de $\Delta(G_1)|\sigma$ es igual que el número de componentes de $\Delta(G \setminus e)|\sigma$.

En tal caso, tenemos que $\Delta(G_1)|\sigma$, $\Delta(G_2)|\sigma$ y $\Delta(G)|\sigma$ tienen las mismas componentes. Dado un etiquetado monótono de $\Delta(G)|\sigma$ obtenemos un etiquetado monótono de $\Delta(G_1)|\sigma$ o $\Delta(G_2)|\sigma$ dependiendo cual etiqueta sea mayor, la de u o la de v . Obtenemos

$$\frac{m_1(\Delta(G)|\sigma)}{|\Delta(G)|\sigma|!} = \frac{m_1(\Delta(G_1)|\sigma)}{|\Delta(G_1)|\sigma|!} + \frac{m_1(\Delta(G_2)|\sigma)}{|\Delta(G_2)|\sigma|!}$$

En ambos casos obtenemos la misma ecuación. Con lo anterior y las Ecuaciones (5.2.2) y (5.2.3), se sigue que

$$P(G; q) - \frac{1}{2}[P(G_1; q) + P(G_2; q)] = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\sigma \in P(n), \\ u \sim_{\sigma} v}} q^{i(E \setminus e, \sigma)} \frac{m_1(\Delta(G \setminus e)|\sigma)}{|\Delta(G \setminus e)|\sigma|!} \mu_P(\sigma, \hat{1}_{|V|}).$$

Juntando esta ecuación con la Ecuación (5.2.1), se obtiene

$$P(G; q) - P(G \setminus e; q) = (q - 1)(2P(G; q) - P(G_1; q) - P(G_2; q)).$$

□

Conclusiones

En esta tesis desarrollamos la teoría de cumulantes desde un punto de vista combinatorio. Logramos entender la relación del polinomio de Tutte en las fórmulas entre cumulantes y presentamos un avance que consideramos sustancioso para la fórmula faltante de cumulantes clásicos a cumulantes monótonos. Esperamos continuar trabajando en este problema en un futuro.

Las herramientas de Probabilidad no Conmutativa y Combinatoria presentadas en esta tesis nos ofrecen las bases para comenzar un estudio más amplio tanto de posibles aplicaciones de probabilidad no conmutativa, como de las aplicaciones de matroides y el polinomio de Tutte.

Apéndice

Las siguientes tablas muestran el polinomio $Q(\tilde{G}(\pi); t, q)$ para las gráficas de anti-intervalos asociadas a algunas de las particiones.

| | | |
|---|----------------|---|
|  | 1 | 1 |
|   | $-\frac{1}{2}$ | $-1 + \frac{1}{2}t$ |
|   | -1 | $-1 + q$ |
|   | $\frac{1}{3}$ | $1 - t + \frac{1}{3}t^2$ |
|   | 1 | $2 - t - q + \frac{1}{3}tq$ |
|   | $\frac{1}{2}$ | $1 - \frac{1}{2}t - q + \frac{1}{2}t^2q$ |
|   | $\frac{2}{3}$ | $2 - \frac{3}{2}t + \frac{1}{6}t^3$ |
|   | $\frac{3}{2}$ | $2 - \frac{1}{2}t - 2q + \frac{1}{2}tq^2$ |
|   | 1 | $1 - \frac{1}{2}t - q + \frac{1}{2}t^2q$ |
|   | 2 | $2 - 3q + q^3$ |
|   | 1 | $1 - 2q + q^2$ |

| | | |
|--|------------------|---|
| | $-\frac{1}{4}$ | $-1 + \frac{3}{2}t - t^2 + \frac{1}{4}t^3$ |
| | $-\frac{1}{3}$ | $-1 + t - \frac{1}{3}t^2 + q - tq + \frac{1}{3}t^2q$ |
| | $-\frac{1}{4}$ | $-1 + t - \frac{1}{4}t^2 + q - tq + \frac{1}{4}t^2q$ |
| | $-\frac{11}{24}$ | $-2 + \frac{5}{2}t - \frac{11}{12}t^2 - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{8}t^4$ |
| | $-\frac{7}{12}$ | $-2 + 2t - \frac{7}{12}t^2 + q - \frac{1}{2}tq - \frac{1}{3}t^2q + \frac{5}{24}t^3q$ |
| | $-\frac{11}{12}$ | $-4 + \frac{9}{2}t - \frac{5}{6}t^2 - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{24}t^5$ |
| | $-\frac{7}{6}$ | $-4 - \frac{7}{2}t - \frac{5}{12}t^2 - \frac{1}{6}t^3 + 2q - tq - \frac{1}{3}t^2q + \frac{1}{12}t^4q$ |
| | -2 | $-4 + 2t + 5q - 2tq - \frac{1}{3}t^2q - q^3 + \frac{1}{3}t^2q^3$ |
| | $-\frac{1}{2}$ | $-1 + \frac{1}{2}t + 2q - tq - q^2 + \frac{1}{2}tq^2$ |
| | $-\frac{2}{3}$ | $-2 + 2t - \frac{2}{3}t^2 + q - \frac{1}{2}tq - \frac{1}{3}t^2q + \frac{1}{4}t^3q$ |
| | $-\frac{11}{6}$ | $-4 + 4t - \frac{7}{6}t^2 + q - \frac{2}{3}t^2q + \frac{1}{6}t^4q$ |
| | -1 | $-2 + t + 3q - \frac{3}{2}tq - q^3 + \frac{1}{2}tq^3$ |
| | -1 | $-2 + t + 3q - tq - \frac{1}{3}t^2q - q^2 + \frac{1}{3}t^2q^2$ |
| | $-\frac{5}{4}$ | $-4 + \frac{7}{2}t - \frac{7}{12}t^2 - \frac{1}{3}t^3 + 2q - tq - \frac{1}{3}t^2q + \frac{1}{8}t^4q$ |

Bibliografía

- [1] Nica, A., and Speicher, R. (2006). Lectures on the combinatorics of free probability (Vol. 13). Cambridge University Press.
- [2] Stanley, R. P. (2012). Enumerative combinatorics. Cambridge: Cambridge Univ. Press.
- [3] Welsh, D. J. (2010). Matroid theory. Mineola, NY: Dover Publications.
- [4] Aigner, M. (2007). A course in enumeration. Berlin: Springer.
- [5] Arizmendi, O., Hasebe, T., Lehner, F., Vargas, C. (2015). Relations between cumulants in noncommutative probability. *Advances in Mathematics*, 282, 56-92.
- [6] Josuat-Verges, M. (2013). Cumulants of the q -semicircular Law, Tutte Polynomials, and Heaps. *Canadian Journal of Mathematics*, 65, 863-878.