



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

MATRICES ALEATORIAS CON ESTRUCTURA

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTA
ARELI KARINA MARTÍNEZ TAPIA

DIRECTORES DE TESIS
DR. OCTAVIO ARIZMENDI ECHEGARAY
DR. HUGO ADÁN CRUZ SUÁREZ

PUEBLA, PUE.

AGOSTO 2018

A mis padres.

Agradecimientos

Quiero agradecer a Dios por permitirme terminar esta etapa de mi vida.

A mis padres, Felipe de Jesús Martínez y María Reyna Tapia por todos los esfuerzos que han hecho a lo largo de mi vida, por apoyarme en todas mis decisiones de estudio, los amo.

A mi hermano Phil, por todas las horas de charlas, por los consejos y por incentivarne a ser una verdadera matemática.

Agradezco enormemente al Dr. Octavio Arizmendi, por permitirme trabajar bajo su dirección. Por toda su paciencia, confianza y apoyo a lo largo de la elaboración de esta tesis.

Al Dr. Hugo Adán Cruz Suárez por todos sus comentarios en el transcurso de la elaboración de esta tesis.

Al Dr. Carlos Vargas Obieta, por sus aportaciones y observaciones a esta tesis.

Al Dr. Víctor Hugo Vázquez Guevara, a la Dra. Hortensia Josefina Reyes Cervantes y el Dr. Francisco Solano Tajonar Sanabria por sus observaciones y comentarios para mejorar esta tesis.

A Kike, por todos los bellos momentos que he pasado a su lado a lo largo de estos cinco años, por todo su apoyo y motivación a seguir adelante.

A Diana, Vanessa, Iris y Ricardo, que hicieron más amena mi estancia en el Cimat.

A Gaby, Sinai, América, Mina, Héran y tod@s mis amig@s con los que he compartido tantos momentos a lo largo de la licenciatura. En particular, agradezco a Héran por dedicarme el tiempo necesario para poder resolver todas mis dudas sobre Física.

Introducción

La Teoría de Matrices Aleatorias fue estudiada por primera vez en la década de los 30's por Wishart [26] y otros investigadores en matemática estadística. Sin embargo, fue hasta los 50's que Wigner [25] introdujo esta teoría a la física matemática. Esto dio inicio a la Teoría de Matrices Aleatorias moderna.

El Teorema de Wigner o Ley del semicírculo establece, bajo ciertas condiciones sobre una sucesión de matrices A_N con características particulares, que para cada $x \in \mathbb{R}$ cuando $N \rightarrow \infty$

$$F_{A_N}(x) := \frac{1}{N} \#\{i : \lambda_i^N \leq x\} \xrightarrow{c.s.} \int_{-\infty}^x f(t) 1_{[2,-2]}(t) dt,$$

en donde $f(t) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4-t^2}$, $-2 \leq t \leq 2$ es la función de densidad del semicírculo.

Años después, en 1991, Voiculescu [22] estudió matrices aleatorias con ciertas simetrías y mostró que satisfacen la propiedad conocida como libertad asintótica que relaciona estas matrices con operadores altamente no conmutativos esto transformó la teoría dramáticamente pues permitió aplicar herramientas de Análisis Funcional a la Teoría de Matrices Aleatorias.

Hoy en día, las matrices aleatorias tienen aplicaciones en campos tan diversos como la Teoría de Números (hipótesis de Riemann), ecuaciones diferenciales estocásticas, física de la materia condensada, física estadística, sistemas caóticos, álgebra lineal numérica, redes neuronales, estadística multivariada, teoría de la información, procesamiento de señales y redes de pequeños mundos ([6], [9], [13]).

En esta tesis se estudia la distribución asintótica de matrices markovianas cuya dependencia en las entradas es fuerte, considerando que algunos de los ensambles de matrices aleatorias de dimensión grande se comportan como variables aleatorias libres, lo que se conoce como libertad asintótica y sirve para calcular la distribución espectral de matrices aleatorias. El objetivo es demostrar de manera diferente usando la teoría de grafos que la distribución asintótica de matrices Markovianas es la convolución de dos variables aleatorias libres.

En el Capítulo 1 definimos formalmente qué es una matriz aleatoria y un ensamble de matrices aleatorias. Mencionando algunos ensambles de matrices

aleatorias. Por otro lado, se definen los conceptos primordiales de teoría de grafos y su conexión con los números de Catalan y las trayectorias de Dyck; que son base importante para poder realizar la demostración del Teorema de Wigner que presentamos al final del capítulo.

En el Capítulo 2 se introduce la Probabilidad Libre o Probabilidad no Conmutativa, considerando sus propiedades básicas y los criterios que se deben de considerar para hablar de independencia libre. Además, se define el concepto de variable aleatoria semicircular que es de gran importancia en la teoría de matrices aleatorias. Para finalizar el capítulo se demuestra que una sucesión de matrices aleatorias que cumplen con ciertas características convergen a variables con distribución semicircular.

Finalmente, en el Capítulo 3, se estudian las matrices de Markov y su comportamiento cuando el tamaño tiende a infinito con ejemplos diversos. A lo largo de todo el capítulo se observa que las matrices de Markov tendrán un comportamiento similar al de una diferencia de dos variables aleatorias libres.

Índice general

Introducción	I
Notación	v
1. Teorema de Wigner	1
1.1. Matrices Aleatorias	2
1.2. Preliminares	4
1.3. Teorema de Wigner	11
2. Independencia Libre Asintótica	19
2.1. Espacios de Probabilidad No Conmutativos	19
2.2. Independencia Libre	25
2.3. Independencia Libre y Matrices Aleatorias	36
3. Matrices de Markov	51
Conclusión	70
Bibliografía	73

Notación

Símbolo	Descripción
E	el conjunto de aristas.
V	el conjunto de vértices.
G	un grafo.
\tilde{G}	el esqueleto de un grafo.
T	un árbol.
\mathbb{R}	el conjunto de los números reales.
\mathbb{C}	el conjunto de los números complejos.
\mathbb{Z}	el conjunto de los números enteros.
\mathbb{N}	el conjunto de los números enteros no negativos.
C_k	el k -ésimo número de Catalan.
\mathbb{P}	la medida de probabilidad.
\mathbb{E}	el valor esperado.
tr	la traza normalizada.
Tr	la traza no normalizada.
$\mathbb{C}G$	el álgebra del grupo G .
$NC(n)$	el conjunto de todas las particiones que no se cruzan del conjunto $\{1, \dots, n\}$.
$K(\pi)$	el complemento de Kreweras.
$\Re a$	la parte real de a .
$\Im a$	la parte imaginaria de a .
$\mathcal{P}(n)$	el conjunto de todas las particiones del conjunto $\{1, \dots, n\}$.

Capítulo 1

Teorema de Wigner

Wigner introdujo la teoría de matrices en física matemática alrededor de los años 50's cuando realizaba una gran cantidad de experimentos con núcleos pesados; los átomos pesados absorben y emiten miles de frecuencias. Así que un experimento de este estilo nos proporciona una gran cantidad de diferencias en los niveles de energía y es difícil encontrar el conjunto de niveles a partir de las diferencias dadas. De hecho, es imposible conocer la energía de los niveles exactamente y etiquetarlos. Para abordar este problema se requiere comprender el problema del valor propio

$$H\psi_i = E_i\psi_i,$$

en donde H es el Hamiltoniano del sistema (ver Capítulo 3 de [7]), y E_i son los niveles de energía junto con las funciones propias ψ_i . Pero escribir el Hamiltoniano H ya era un problema debido a los cientos de núcleos involucrados.

La teoría con la que Wigner contaba en ese tiempo lo llevaba a realizar una ecuación de Schrödinger (ver Capítulo 4 de [27]) e intentar resolverla, pero debido al tamaño del Hamiltoniano no era posible. También consideró tratar de resolver el problema del valor propio pero sería imposible debido a que los sistemas grandes generalmente no son integrables. Finalmente decidió usar métodos estadísticos. En lugar de buscar una solución aproximada para el sistema nuclear, se centró en la distribución de los niveles de energía, la teoría estadística no predeciría la secuencia detallada de niveles en un núcleo, pero describiría la aparición general y el grado de irregularidad de los niveles. Wigner supuso que el conocimiento detallado del sistema no sería importante para la descripción estadística del sistema. Así, Wigner propuso

describir las propiedades de un núcleo pesado a través de un conjunto de matrices aleatorias, donde las entradas de la matriz fueran independientes y con cierta distribución.

Todo lo que Wigner y más tarde Dyson requirieron fue que

- Las matrices fueran hermitianas o simétricas reales, de tal modo que los valores propios fueran reales.
- Que el conjunto se comportara “naturalmente” bajo ciertos grupos de simetría física (ensamble de matrices gaussianas unitarias (GUE); ensamble de matrices gaussianas ortogonales (GOE); ensamble de matrices gaussianas simpléctico (GSE), donde las entradas de las matrices son reales o cuaterniónicas (ver Capítulo 2 de [13])).

Durante las décadas de los 50's, 60's, y principios de los 70's, varios investigadores comenzaron a probar la hipótesis de Wigner con datos experimentales reales en una gran variedad de situaciones físicas obteniendo resultados impresionantes. Por ejemplo, en [3] se encuentra que las fluctuaciones de nivel del Billar cuántico de Sinai es consistente con las predicciones del GOE. Lo que llevó a fortalecer la creencia de que las leyes de las fluctuaciones de nivel son universales.

Gracias a las dificultades que tuvo Wigner al tratar de resolver su problema fue que descubrió la ley del semicírculo en 1955.

Este capítulo está organizado como sigue. En la Sección 1 se introducen las definiciones básicas de la teoría de matrices aleatorias. En la Sección 2 se presenta una introducción a la teoría de grafos además de su relación con los números de Catalan, las trayectorias de Dyck y los momentos de la ley del semicírculo. Finalmente, en la Sección 3 se presenta una demostración del Teorema de Wigner usando el método de momentos.

1.1. Matrices Aleatorias

La primera vez que aparecieron las matrices aleatorias en matemática estadística no fueron tan relevantes, Wigner fue el que impulsó su aplicación al resolver su problema de física nuclear. En la actualidad son utilizadas en varias ramas de la Física y la Matemática. Si se requiere profundizar en la teoría de matrices aleatorias se puede consultar: [13] y [19].

Definición 1.1. Una **matriz aleatoria** toma valores en el espacio $M_{n \times p}(\mathbb{R})$ o $M_{n \times p}(\mathbb{C})$, en donde n y p son enteros positivos (usualmente el estudio se enfoca en el caso en que $n = p$). Sea $A = (a_{ij})_{i,j=1}^N$ una matriz aleatoria, la entrada a_{ij} es una variable aleatoria definida en

$$L^{\infty-}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) := \bigcap_{1 \leq p < \infty} L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}),$$

en donde $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ es un espacio de probabilidad, esto es, Ω es un conjunto no vacío, \mathcal{F} es un σ -campo de subconjuntos medibles de Ω y $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ una medida de probabilidad.

Recordemos que una matriz H es hermitiana si y sólo si

$$H = H^\dagger,$$

en donde \dagger es la transpuesta conjugada, en términos de elementos de matrices se lee

$$h_{ij} = \overline{h_{ji}},$$

donde $\bar{\cdot}$ representa la conjugación compleja.

Un caso particular son las matrices simétricas. Una matriz H es simétrica si y sólo si todas sus entradas son reales y

$$H = H^T,$$

en donde T representa la transposición.

Definición 1.2. Sea $X = (x_{ij})$ una matriz aleatoria en $M_N(\mathbb{C})$. Si X es hermitiana y $\{x_{ij} : 1 \leq i \leq j \leq N\}$ son variables aleatorias independientes, diremos que X es una **matriz de Wigner**.

Observación 1.3. Los valores propios de una matriz aleatoria hermitiana en $M_n(\mathbb{C})$ son reales y aleatorios.

Definición 1.4. Un **ensamble de matrices aleatorias** es una sucesión $\{X^N\}_{N \geq 1}$ de matrices aleatorias de tamaño $N \times N$ con $N \in \mathbb{N}$.

A continuación, se presenta la definición de algunos ensamblajes importantes dentro de la teoría de matrices aleatorias.

Definición 1.5. Un ensemble $G = \{G^N\}$ se dice **gaussiano ortogonal** $GOE(N)$ si para todo $N \in \mathbb{N}$, $G^N = (G_{ij}^N)_{i,j=1,\dots,N}$ es tal que $\{G_{ij}, 1 \leq i \leq j \leq N\}$ son variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas con

$$G_{ii}^N \sim N(0, 1),$$

$$G_{ij}^N \sim N(0, \frac{1}{2}) \quad \forall \quad i \neq j,$$

el $GOE(N)$ está definido sobre el espacio de matrices reales simétricas $N \times N$ caracterizado por la siguiente propiedad:

- El ensemble es invariante bajo cada transformación

$$G \mapsto O^T G O,$$

donde O es una matriz ortogonal, $O^T O = O O^T = 1$.

Definición 1.6. Un ensemble $G = \{G^N\}$ se dice **gaussiano unitario** $GUE(N)$ si para todo $N \in \mathbb{N}$, $G^N = (G_{ij}^N)_{i,j=1,\dots,N}$ es tal que $\{G_{ij}, 1 \leq i \leq j \leq N\}$ son variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas con

$$G_{ii}^N \sim N(0, 1),$$

$$G_{ij}^N \sim N(0, \frac{1}{2}) \quad \forall \quad i \neq j,$$

el $GUE(N)$ está definido sobre el espacio de matrices hermitianas $N \times N$ que se caracteriza por la siguiente propiedad:

- El ensemble es invariante bajo transformaciones unitarias

$$G \mapsto U^\dagger G U,$$

en donde U es una matriz unitaria, $U^\dagger U = U U^\dagger = 1$.

1.2. Preliminares

En términos generales, el Teorema de Wigner nos describe la densidad de los eigenvalores cuando N tiende a infinito. Para su demostración, es necesario definir algunos conceptos y proposiciones. Esta sección se basa en [8], [15] y [24].

Definición 1.7. Sea $V = \{i_1, \dots, i_k\}$ un conjunto de vértices y $E = \{(i_p, i_q) : i_p, i_q \in V\}$ un conjunto de aristas

- Una **arista** es un par ordenado de puntos llamados vértices, $e_i = (i_l, i_m)$.
- Una **arista dirigida** es una arista en donde no es importante el orden de los vértices, $(i_l, i_m) = (i_m, i_l)$.
- Una **arista no dirigida** es simplemente una arista; esto es, sí importa el orden de los vértices, $(i_l, i_m) \neq (i_m, i_l)$.
- Una **arista aislada** (i_l, i_{l+1}) es aquella tal que para cualquier otra arista (i_m, i_{m+1}) se tiene que $(i_l, i_{l+1}) \neq (i_m, i_{m+1})$ y $(i_m, i_{m+1}) \neq (i_l, i_{l+1})$.

Definición 1.8. Sea $V = \{i_1, \dots, i_k\}$ un conjunto de vértices y $E = \{(i_p, i_q) : i_p, i_q \in V\}$ un conjunto de aristas

- Un **grafo** es un par $G = (V, E)$ con conjunto de vértices V y conjunto de aristas E .
- Un **grafo conexo** es un grafo (V, E) tal que cualquier par de vértices v_1, v_2 en V se pueden conectar por una trayectoria, esto es, existe una subcolección de aristas $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{n-1}, i_n)$ de E tal que $v_1 = i_1$ y $v_2 = i_n$.
- Un **grafo conexo tiene un ciclo** si existe una subcolección de aristas $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{n-1}, i_n)$ de E tal que $i_1 = i_n$.
- El **esqueleto** de un grafo conexo se define por $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ en donde \tilde{V} es el conjunto de los distintos vértices de V y \tilde{E} es el conjunto de aristas no dirigidas que se obtienen de quitar las repeticiones de E .

Para tener una mejor noción de los grafos, en la Figura 1.1, se presentan ejemplos de cada uno de ellos.

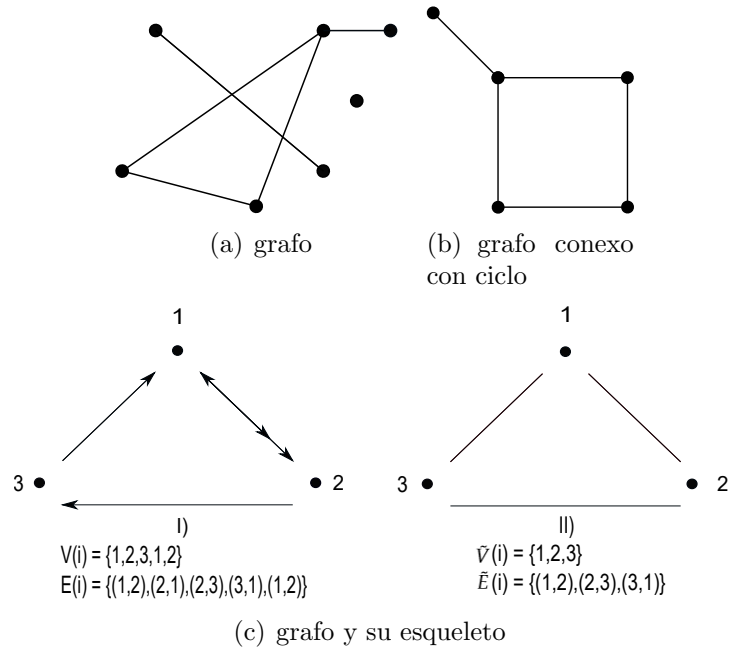


Figura 1.1: Tipos de grafos.
 Fuente: Elaboración propia.

Definición 1.9. Si $G = (V, E)$ es un grafo, entonces $G_1 = (V_1, E_1)$ es llamado un **subgrafo** de G si $\emptyset \neq V_1 \subseteq V$ y $E_1 \subseteq E$, en donde cada arista de E_1 incide con vértices de V_1 .

Definición 1.10. Sea $G = (V, E)$ un grafo, se tiene que:

- Un **árbol** es un grafo conexo acíclico y lo denotaremos por T .
- Un **árbol con raíz** es un árbol con una arista dirigida fija que llamaremos raíz.

En la Figura 1.2, se muestran algunos ejemplos de estructuras de árboles.

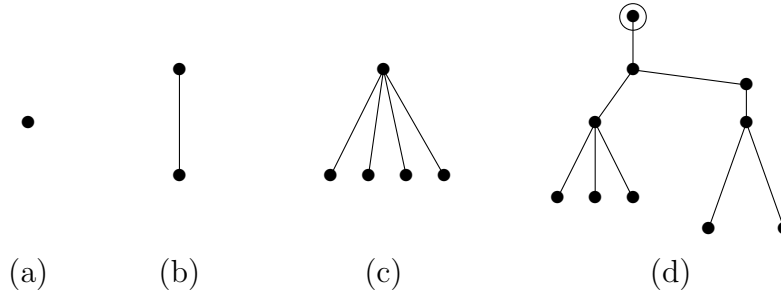


Figura 1.2: (a), (b), (c) son árboles y (d) es un árbol con raíz.

Fuente: Discrete and Combinatorial Mathematics [8], El Teorema De Wigner para Matrices Aleatorias [15].

Notación 1.11. Consideremos $G = (V, E)$ un grafo. El número de vértices y aristas de G lo denotaremos por $|V|$ y $|E|$, respectivamente.

Lema 1.12. Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo, entonces

$$|V| \leq |E| + 1.$$

La igualdad ocurre si y sólo si G es un árbol.

Demostración. Observemos que los grafos conexos se pueden clasificar en acíclicos y cíclicos. Los grafos conexos acíclicos son por definición árboles. En primer lugar, demostraremos que si G es un árbol entonces $|V| = |E| + 1$. La prueba se hará por el principio de Inducción matemática en $|E|$.

Si $|E| = 0$, entonces el árbol consiste de un sólo vértice. Así, $|V| = 1 = |E| + 1$. Asumiendo que es cierto para cada árbol que tiene a lo sumo k aristas, con $k \geq 0$.

Ahora, consideremos un árbol $T = (V, E)$ con $|E| = k + 1$. Si por un instante se remueve una arista de tal manera que se obtienen dos subárboles digamos $T_1 = (V_1, E_1)$ y $T_2 = (V_2, E_2)$ en donde $|V| = |V_1| + |V_2|$ y $|E_1| + |E_2| + 1 = |E|$.

Dado que $0 \leq |E_1| \leq k$, $0 \leq |E_2| \leq k$ se sigue por la hipótesis de inducción que $|E_1| + 1 = |V_1|$ y $|E_2| + 1 = |V_2|$. En consecuencia, $|v| = |V_1| + |V_2| = (|E_1| + 1) + (|E_2| + 1) = (|E_1| + |E_2| + 1) + 1 = |E| + 1$.

Por lo tanto, $|V| = |E| + 1$ siempre que G sea un árbol.

Ahora, demostremos que si G es un grafo conexo cíclico, entonces $|V| < |E| + 1$. Como G es un grafo cíclico existen al menos dos trayectorias distintas

que van de (k, l) a (s, t) , esto es, existe al menos una arista doble a lo largo de la trayectoria, así quitaremos aristas de tal manera que obtengamos un árbol $T = (V, E')$ debido a que el número de aristas se conserva y $|E'| < |E|$. Como T es un árbol se cumple que $|V| = |E'| + 1$, entonces $|V| = |E'| + 1 < |E| + 1$.

Por lo tanto, $|V| < |E| + 1$ siempre que G sea un grafo conexo cíclico. \square

Nuestro interés se centra en contar el número de árboles con raíz que se pueden formar con k aristas, el conteo se hará de tal manera que se identificará con $2k$ -tuplas de entradas dicotómicas de la forma $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{2k})$ y construidas de la siguiente manera, *si en el i -ésimo paso del recorrido la arista en turno es recorrida por primera vez entonces $\xi_i = 1$ y si ya había pasado por ella entonces $\xi_i = -1$.*

Esto nos da una biyección entre los árboles con raíz de k -aristas y el subconjunto T_{2k} de $\{-1, 1\}^{2k}$ que consta de los elementos $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{2k})$ tales que

$$\begin{aligned}\xi_j &= \pm 1, \\ \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{2k} &= 0, \\ \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 2k,\end{aligned}$$

estas tres condiciones garantizan que el recorrido inicia y termina en la raíz, que al término del recorrido se recorra la misma cantidad de aristas de ida y de vuelta.

Definición 1.13. (1) Una **trayectoria NE-SE**, es una trayectoria en el plano \mathbb{Z}^2 que empieza en $(0, 0)$ y tiene pasos de la forma $(1, 1)$ (pasos Norte-Este) o de la forma $(1, -1)$ (pasos Sur-Este).

(2) Sea γ una trayectoria NE-SE, diremos que es una **trayectoria de Dyck** si todos los puntos visitados por γ son de la forma (i, j) con $j \geq 0$ y el último de ellos es de la forma $(k, 0)$.

Observemos que dado un número positivo k , el conjunto de trayectorias NE-SE con k pasos es identificado naturalmente con $\{-1, 1\}^k$, identificando una trayectoria γ con la sucesión ± 1 las cuales aparecen como segundos componentes para los k pasos de γ . Se ve inmediatamente que una k -tupla $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ corresponde a una trayectoria de Dyck sí y sólo si

$$\begin{aligned}\lambda_1 + \dots + \lambda_j &\geq 0, & \forall \quad 1 \leq j \leq k, \\ \lambda_1 + \dots + \lambda_k &= 0,\end{aligned}$$

a partir de la igualdad, es claro que las trayectorias de Dyck con k pasos solo pueden existir cuando k es par. Además, tenemos una biyección entre las trayectorias de Dyck de $2k$ pasos y el conjunto T_{2k} de $\{-1, 1\}^{2k}$, y como ya habíamos mencionado antes también existe una biyección entre los árboles de raíz de k -aristas y el conjunto T_{2k} de $\{-1, 1\}^{2k}$, en consecuencia existe una biyección entre las trayectorias de Dyck de $2k$ pasos con los árboles de raíz de k -aristas.

Notación 1.14. Para cada entero $n \geq 0$ denotaremos por C_n al n -ésimo número de Catalan,

$$C_n := \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!},$$

con la convención que $C_0 = 1$.

Proposición 1.15. El número de árboles con raíz que se pueden formar con k aristas coinciden con el k -ésimo número de Catalan

$$C_k = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k}, \quad k \geq 1.$$

Demostración. Primero contaremos el número de trayectorias NE-SE que inician en $(0, 0)$ y terminan en $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$. Una trayectoria NE-SE con u NE-pasos y v SE-pasos termina en $(u+v, u-v)$ para algunos $u, v \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; ésto pasa sí y sólo si $m > 0$, $|n| \leq m$ y m, n tienen alguna paridad.

Si se satisfacen estas últimas condiciones, entonces las trayectorias que llegan hasta (m, n) son precisamente todas aquellas que tienen $\frac{m+n}{2}$ NE-pasos y $\frac{m-n}{2}$ SE-pasos. Como las trayectorias se pueden identificar con m -tuplas en $\{-1, 1\}^m$ se concluye que $\frac{m+n}{2}$ componentes son iguales a 1, y que se pueden contar con $\binom{m}{\frac{m+n}{2}}$.

En particular, el número de trayectorias que van de $(0, 0)$ a $(2k, 0)$ es $\binom{2k}{k}$, pero no todas son de Dyck. Nos interesa contar las trayectorias que

no son de Dyck, es decir, aquellas que bajan del eje x , para ello utilizaremos un “truco de reflexión”. Sea α una trayectoria que no es de Dyck que va de $(0, 0)$ a $(2k, 0)$ y sea j el mínimo de $\{1, \dots, 2k - 1\}$ tal que $(j, -1) \in \alpha$. Entonces α se puede escribir como una yuxtaposición de dos trayectorias, $\alpha = \alpha' \vee \alpha''$, donde α' va desde $(0, 0)$ a $(j, -1)$ y α'' va desde $(j, -1)$ a $(2k, 0)$. Sea $\widehat{\alpha''}$ la reflexión α'' sobre la recta $y = -1$, así $\widehat{\alpha''}$ es una trayectoria que va desde $(0, 0)$ a $(2k, -2)$. Entonces, podemos definir $F(\alpha) := \alpha' \vee \widehat{\alpha''}$, una trayectoria NE-SE desde $(0, 0)$ a $(2k, -2)$, como se muestra en la Figura 1.3.

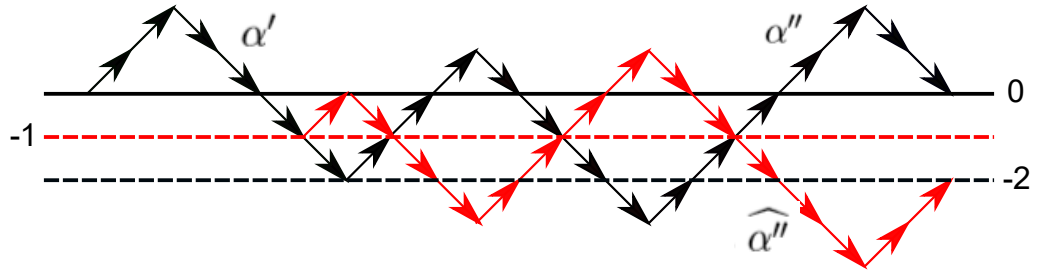


Figura 1.3: gráfica y su reflexión.

Fuente: Lectures on the Combinatorics of Free Probability [16].

La transformación F es una biyección. En efecto, sea β una trayectoria que va de $(0, 0)$ a $(2k, -2)$ entonces existe un mínimo $j \in \{1, \dots, 2k - 1\}$ tal que β está por debajo de la recta $y = -1$ después de j pasos. Escribimos $\beta = \beta' \vee \beta''$ con β' de $(0, 0)$ a $(j, -1)$ y β'' desde $(j, -1)$ a $(2k, 0)$, y sea $\widehat{\beta''}$ la reflexión de β'' en la recta $y = -1$; entonces $\alpha := \beta' \vee \widehat{\beta''}$ es la única trayectoria en el dominio de F tal que $F(\alpha) = \beta$.

Se sigue que el número de trayectorias que terminan en $(2k, 0)$ pero no son de Dyck es igual al número de trayectorias que terminan en $(2k, -2)$ que son $\binom{2k}{k-1}$. Finalmente, el número de trayectorias de Dyck con $2k$ pasos es

$$\binom{2k}{k} - \binom{2k}{k-1} = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} = C_k.$$

□

1.3. Teorema de Wigner

E. P. Wigner obtuvo la Ley del Semicírculo también conocida como Teorema de Wigner durante la década de los 50's, logrando explicar el comportamiento estadístico de los niveles de energía de un sistema físico en términos de los valores propios cuando la dimensión de las matrices es grande.

Definición 1.16. Sea A una matriz aleatoria hermitiana de tamaño $N \times N$ y $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ sus valores propios. La **función de distribución espectral empírica** de A se define por

$$F_A(x) := \frac{1}{N} \#\{1 \leq i \leq N : \lambda_i \leq x\}, \quad x \in \mathbb{R},$$

determina la proporción de valores propios menores o iguales a x .

Consideremos matrices de Wigner que satisfacen las siguientes condiciones

$$\mathbb{E}[a_{ij}] = 0, \quad (1.1)$$

$$\mathbb{E}|a_{ij}|^2 = \frac{1}{N}, \quad (1.2)$$

$$M_k := \sup_{N \in \mathbb{N}} \max_{1 \leq i \leq j \leq N} \mathbb{E}|\sqrt{N}a_{ij}|^k < \infty. \quad (1.3)$$

Es necesario que nuestras matrices se normalicen, de lo contrario se dispersaría la masa y no habría convergencia; (1.3) es una condición para acotar los momentos que nos permite usar el método de momentos.

Notación 1.17. Sean

$$B := \sqrt{N}A \quad y \quad b_{ij} := \sqrt{N}a_{ij},$$

$$\mathbf{i} := (i_1, \dots, i_k) \in \{1, 2, \dots, N\}^k, \quad i_{k+1} = i_1,$$

$$Q(\mathbf{i}) := \mathbb{E}[b_{i_1 i_2} b_{i_2 i_3} \cdots b_{i_k i_1}],$$

$$\sum_{\mathbf{i}} := \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^N := \sum_{i_1=1}^N \cdots \sum_{i_k=1}^N.$$

A consecuencia de que $\mathbf{Q}(\mathbf{i})$ tiene una estructura cíclica, podemos identificar cada índice \mathbf{i} con un grafo conexo $G(\mathbf{i}) = (V(\mathbf{i}), E(\mathbf{i}))$ en donde $V(\mathbf{i}) = \{i_1, \dots, i_k\}$ son los vértices y $E = \{(i_1, i_2), \dots, (i_k, i_1)\}$ las aristas dirigidas tal y como se definió en la sección anterior. Además, podemos representar al grafo conexo como se ilustra en la Figura 1.4.

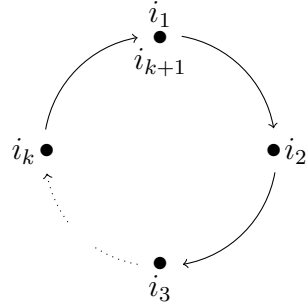


Figura 1.4: grafo de los índices de $b_{i_1 i_2} b_{i_2 i_3} \cdots b_{i_k i_1}$.

Fuente: El Teorema de Wigner para matrices aleatorias [15].

Recordemos que dadas $A = (a_{ij})$ una matriz de tamaño $m \times n$ y $B = (b_{ij})$ una matriz de tamaño $n \times s$ el producto de AB será una matriz de tamaño $m \times s$ donde la kj -coordenada es $c_{kj} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj}$. De manera que podemos escribir la traza no normalizada de la k -ésima potencia de B como

$$\begin{aligned} \text{Tr}((B)^k) &= \sum_{i_1}^N ((B)^k)_{i_1 i_1} = \sum_{i_1, i_2=1}^N b_{i_1 i_2} ((B)^{k-1})_{i_2 i_1} \\ &= \cdots = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^N b_{i_1 i_2} b_{i_2 i_3} \cdots b_{i_k i_1}. \end{aligned}$$

Teorema 1.18 (Teorema de Wigner). Si $\{A_N, N \geq 1\}$ es una sucesión de matrices de Wigner que cumplen las condiciones (1.1)-(1.3), entonces la distribución espectral empírica de A_N converge casi seguramente a la distribución del semicírculo, es decir, para cada $x \in \mathbb{R}$, cuando $N \rightarrow \infty$

$$F_{A_N}(x) := \frac{1}{N} \#\{i : \lambda_i^N \leq x\} \xrightarrow{\text{c.s.}} \int_{-\infty}^x f(t) 1_{[2, -2]}(t) dt,$$

en donde $f(t) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-t^2}$, $-2 \leq t \leq 2$ es la función de densidad del semicírculo.

La convergencia del Teorema de Wigner se demostrará a partir del método de momentos (Ver Capítulo 2 de [19]). El *método de momentos* establece:

Sean F_n y F funciones de distribución para las cuales existen sus momentos $\int x^k F_n(dx)$ y $\int x^k F(dx)$ para $k = 1, 2, \dots$ respectivamente. Si F está únicamente determinada por sus momentos y $\int x^k F_n(dx) \rightarrow \int x^k F(dx)$, cuando $n \rightarrow \infty$ para $k = 1, 2, \dots$, entonces $F_n(x) \rightarrow F(x)$ cuando $n \rightarrow \infty$ para cada punto de continuidad de F .

Notemos que, los momentos de la distribución espectral empírica cumple la relación

$$\int x^k F_{A_N}(dx) = \frac{\text{Tr}(A_N^k)}{N} \quad \text{c.s.}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

a consecuencia de que la función espectral empírica se puede interpretar como una distribución uniforme continua en los valores propios, en donde cada valor propio tiene probabilidad $\frac{1}{N}$ de ocurrir.

Proposición 1.19. *Los momentos pares de la distribución del semicírculo están dados por los números de Catalan*

$$\int_{-2}^2 x^{2k} \frac{1}{2\pi} \sqrt{4-x^2} dx = C_k.$$

Es claro que los momentos impares es cero por la simetría de la distribución.

Demostración. Sea

$$\begin{aligned} m_{2k} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^2 x^{2k} \sqrt{4-x^2} dx, && \text{(simetría)} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^2 x^{2k} \sqrt{4-x^2} dx, && \text{(cambio } x = 2\sqrt{y}\text{)} \\ &= \frac{2^{2k+1}}{\pi} \int_0^1 y^{k-\frac{1}{2}} (1-y)^{\frac{1}{2}} dy, && \text{(Beta}(\alpha_1, \alpha_2)\text{), } \alpha_1 = k + 1/2, \alpha_2 = 3/2 \\ &= \frac{2^{2k+1}}{\pi} \frac{\Gamma(k + \frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(k + 2)}, \end{aligned}$$

usando las propiedades $\Gamma(k+2) = (k+1)!$ y $\Gamma(\eta+1) = \eta\Gamma(\eta)$ para $\eta > 0$, se tiene que

$$\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 3}{2^k} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right),$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

de donde

$$\begin{aligned} m_{2k} &= \frac{2^{2k+1}}{\pi} \frac{(2k-1)(2k-3)(2k-5)\cdots 3 \cdot 1 \sqrt{\pi}}{2^k} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ &= \frac{k!2^k}{k!(k+1)!} (2k-1)(2k-3)(2k-5)\cdots 3 \cdot 1 \\ &= \frac{(2k)!}{k!(k+1)!} = C_k. \end{aligned}$$

□

Teorema 1.20. *Bajo las mismas condiciones del Teorema 1.18 sobre matrices aleatorias A^N se cumple la convergencia en esperanza*

$$\mathbb{E} \left\{ \frac{\text{Tr}[(A^N)^k]}{N} \right\} \longrightarrow \begin{cases} C_{\frac{k}{2}}, & \text{si } k \text{ es par,} \\ 0, & \text{si } k \text{ es impar,} \end{cases}$$

cuando $N \longrightarrow \infty$.

Para la demostración del Teorema 1.20, introduciremos cierta notación y enunciaremos dos lemas.

Observemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \{tr[(A^N)^k]\} &= \mathbb{E} \left\{ tr[(N^{\frac{-1}{2}} B^N)^k] \right\} \\
&= \frac{1}{N^{\frac{k}{2}+1}} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^N \mathbb{E}[b_{i_1 i_2} b_{i_2 i_3} \cdots b_{i_k i_1}] \\
&= \frac{1}{N^{\frac{k}{2}+1}} \sum_{\mathbf{i}} \mathbf{Q}(\mathbf{i}) \\
&= \frac{1}{N^{\frac{k}{2}+1}} \sum_{\substack{\mathbf{G}(\mathbf{i}) \\ 1 \leq |\tilde{V}(\mathbf{i})| \leq [\frac{k}{2}] + 1}} \mathbf{Q}(\mathbf{i}) + \\
&+ \frac{1}{N^{\frac{k}{2}+1}} \sum_{\substack{\mathbf{G}(\mathbf{i}) \\ |\tilde{V}(\mathbf{i})| \geq [\frac{k}{2}] + 2}} \mathbf{Q}(\mathbf{i}), \tag{1.4}
\end{aligned}$$

esta última desigualdad se cumple al clasificar sus términos de acuerdo al número de vértices que tienen los esqueletos de los grafos.

Lema 1.21. Si $E(\mathbf{i})$ tiene una arista aislada entonces $\mathbf{Q}(\mathbf{i}) = 0$.

Demostración. De la definición de B^N es claro que $\mathbb{E}[b_{ij}] = 0$ para cada i, j y que b_{ij} y b_{lm} son independientes cuando $(i, j) \neq (l, m)$ ó $(l, m) \neq (i, j)$. Luego si (i_l, i_{l+1}) es una arista aislada de $E(\mathbf{i})$

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}(\mathbf{i}) &= \mathbb{E}[b_{i_1 i_2} \cdots b_{i_{l-1} i_l} b_{i_l i_{l+1}} b_{i_{l+1} i_{l+2}} \cdots b_{i_k i_1}] \\
&= \mathbb{E}[b_{i_l i_{l+1}}] \mathbb{E}[b_{i_1 i_2} \cdots b_{i_{l-1} i_l} b_{i_{l+1} i_{l+2}} \cdots b_{i_k i_1}] = 0.
\end{aligned}$$

□

Lema 1.22. Si $|\tilde{V}(\mathbf{i})| \geq [\frac{k}{2}] + 2$ entonces $E(\mathbf{i})$ tiene por lo menos una arista aislada.

Demostración. Por el Lema 1.21, $|\tilde{E}(\mathbf{i})| + 1 \geq |\tilde{V}(\mathbf{i})|$ de donde $|\tilde{E}(\mathbf{i})| \geq [\frac{k}{2}] + 1$, esto es, hay por lo menos $[\frac{k}{2}] + 1$ aristas no dirigidas distintas, entonces $E(\mathbf{i})$ debe de tener una arista dirigida, pues de lo contrario $E(\mathbf{i})$ tendría por lo menos $2([\frac{k}{2}] + 1) = k + 2$ aristas, cuando k es par o por lo menos $k + 1$ aristas cuando k es impar, lo cual en ambos casos es imposible pues $|E(\mathbf{i})| = k$ aristas. □

A consecuencia de los Lemas 1.21 y 1.22, (1.4) se reduce a

$$\mathbb{E} \{tr[(A^N)^k]\} = \frac{1}{N^{\frac{k}{2}+1}} \sum_{\substack{\mathbf{G}(\mathbf{i}) \\ 1 \leq |\tilde{V}(\mathbf{i})| \leq [\frac{k}{2}] + 1}} \mathbf{Q}(\mathbf{i}).$$

Demostración del Teorema 1.20. Dado que $k \in \mathbb{Z}$ tenemos dos casos:

• Caso k impar. Por la desigualdad de Hölder generalizada (Ver [1] página 85) y (1.3) se tiene que

$$\begin{aligned} |\mathbf{Q}(\mathbf{i})| &= |\mathbb{E}[b_{i_1 i_2} b_{i_2 i_3} \cdots b_{i_k i_1}]| \leq [\mathbb{E}|b_{i_1 i_2}|^k]^{\frac{1}{k}} \cdots [\mathbb{E}|b_{i_k i_1}|^k]^{\frac{1}{k}} \\ &\leq M_k^{\frac{1}{k}} \cdots M_k^{\frac{1}{k}} = M_k. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} |\mathbb{E} \{tr [(A^N)^k]\}| &\leq \frac{1}{N^{\frac{k}{2}+1}} \sum_{\substack{\mathbf{G}(\mathbf{i}) \\ 1 \leq |\tilde{V}(\mathbf{i})| \leq [\frac{k}{2}] + 1}} |\mathbf{Q}(\mathbf{i})| \leq \frac{1}{N^{\frac{k}{2}+1}} \sum_{\substack{\mathbf{G}(\mathbf{i}) \\ 1 \leq |\tilde{V}(\mathbf{i})| \leq [\frac{k}{2}] + 1}} M_k \\ &\leq \frac{1}{N^{\frac{k}{2}+1}} \sum_{i_1, \dots, i_{[\frac{k}{2}]} = 1}^N M_k \leq \frac{N^{[\frac{k}{2}]+1}}{N^{\frac{k}{2}+1}} M_k \\ &= \frac{M_k}{N^{\frac{1}{2}}} \longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad N \longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

• Caso k par. Sea

$$\mathbb{E} \{tr [(A^N)^k]\} = S_1 + S_2,$$

en donde

$$S_1 = \frac{1}{N^{\frac{k}{2}+1}} \sum_{\substack{\mathbf{G}(\mathbf{i}) \\ 1 \leq |\tilde{V}(\mathbf{i})| \leq [\frac{k}{2}]} } \mathbf{Q}(\mathbf{i}) \quad \text{y} \quad \frac{1}{N^{\frac{k}{2}+1}} \sum_{|\tilde{V}(\mathbf{i})| = [\frac{k}{2}] + 1} \mathbf{Q}(\mathbf{i}).$$

Pero,

$$|S_1| \leq \frac{1}{N^{\frac{k}{2}+1}} \sum_{i_1, \dots, i_k = 1}^N |\mathbf{Q}(\mathbf{i})| \leq \frac{N^{\frac{k}{2}} M_k}{N^{\frac{k}{2}+1}} \longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad N \longrightarrow \infty.$$

De manera que S_1 converge a cero cuando $N \rightarrow \infty$. Resta demostrar que S_2 converge a $C_{\frac{k}{2}}$. En este caso $|\tilde{V}(\mathbf{i})| = \frac{k}{2} + 1$ por el Lema 1.12, se tiene que $|\tilde{E}(\mathbf{i})| \leq \frac{k}{2}$. Si $|\tilde{E}(\mathbf{i})| > \frac{k}{2}$ entonces $E(\mathbf{i})$ tiene al menos una arista aislada y por el Lema 1.22, $\mathbf{Q}(\mathbf{i}) = 0$.

Si $|\tilde{E}(\mathbf{i})| = \frac{k}{2}$, por el Lema 1.12, $\tilde{G}(\mathbf{i})$ es un árbol, por lo tanto, cada arista en $E(\mathbf{i})$ tiene su arista opuesta en $E(\mathbf{i})$. En este caso $\mathbf{Q}(\mathbf{i})$ es de la forma

$$\mathbf{Q}(\mathbf{i}) = \mathbb{E} \left[|b_{e_1}|^2 |b_{e_2}|^2 \cdots |b_{e_{\frac{k}{2}}}|^2 \right] = \prod_{e \in \tilde{E}(\mathbf{i})} \mathbb{E} |b_e|^2 = \prod_{e \in \tilde{E}(\mathbf{i})} \mathbb{E} |\sqrt{N} a_e|^2 = 1.$$

Como $\tilde{G}(\mathbf{i})$ es un árbol con raíz, de la Proposición 1.15 hay $C_{\frac{k}{2}}$ formas de enumerar las aristas

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{N^{\frac{k}{2}+1}} \sum_{\substack{\mathbf{i} \\ \tilde{G}(\mathbf{i}) \text{ es árbol}}} \mathbf{Q}(\mathbf{i}) \\ &= \frac{1}{N^{\frac{k}{2}+1}} \sum_A \sum_{\substack{\mathbf{i} \\ \tilde{G}(\mathbf{i})=A}} 1 \\ &= \frac{C_{\frac{k}{2}}}{N^{\frac{k}{2}+1}} N(N-1) \cdots \left(N - \frac{k}{2}\right), \end{aligned}$$

de donde

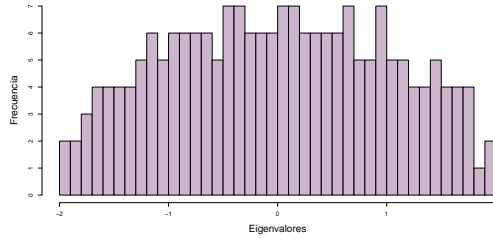
$$\frac{N(N-1) \cdots (N - \frac{k}{2})}{N^{\frac{k}{2}+1}} = \left(\frac{N}{N}\right) \left(\frac{N-1}{N}\right) \cdots \left(\frac{N - \frac{k}{2}}{N}\right) \rightarrow 1,$$

cuando $N \rightarrow \infty$. Por lo que,

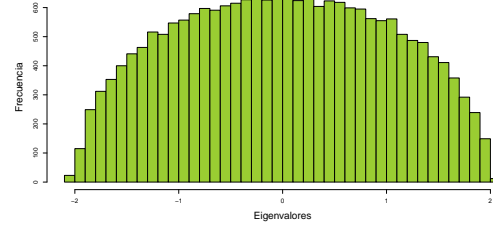
$$S_2 \rightarrow C_{\frac{k}{2}} \quad \text{cuando } N \rightarrow \infty.$$

□

En la Figura 1.5, se muestra la comparación de la convergencia casi segura y la convergencia en media de los eigenvalores de una matriz en $GOE(200)$.



(a) Convergencia casi segura.



(b) Convergencia en media con 100 realizaciones.

Figura 1.5: Comparación de Convergencias con una matriz A_{200} .
Fuente: Elaboración propia.

Notemos que la convergencia en media converge más rápido a la distribución del semicírculo en comparación de la convergencia casi segura.

Capítulo 2

Independencia Libre Asintótica

En 1983 Dan Virgil Voiculescu, tenía gran interés en comprender los operadores de Von Neumann, gracias a esta motivación fue creada la Probabilidad no conmutativa. Fue hasta 1985 que Voiculescu introdujo la noción fundamental de los Espacios de Probabilidad No Conmutativos y la Independencia Libre.

En 1991, Voiculescu estudió que las matrices aleatorias satisfacían la libertad asintótica, esto transformó la teoría dramáticamente. En la actualidad, es fácil obtener el comportamiento de una sucesión de variables aleatorias considerando sólo sus momentos y bajo ciertas condiciones con la ayuda de la independencia libre y la independencia libre asintótica.

2.1. Espacios de Probabilidad No Conmutativos

Definición 2.1. Una *álgebra* consta de un espacio vectorial \mathcal{A} sobre un campo K , junto con una operación binaria de multiplicación en el conjunto \mathcal{A} , tal que para todas las $\beta \in K$ y $a, b, c \in \mathcal{A}$ se satisfacen las condiciones siguientes:

- $(\beta a)b = \beta(ab) = a(\beta b)$.
- $(a + b)c = ac + bc$.
- $a(b + c) = ab + ac$.

También, \mathcal{A} es una álgebra asociativa sobre K si además de las tres condiciones anteriores

$$\blacksquare (ab)c = a(bc) \quad \forall \quad a, b, c \in \mathcal{A},$$

diremos que \mathcal{A} es una **álgebra unitaria** o una **álgebra con unidad** si contiene a su respectiva unidad que denotamos como $1_{\mathcal{A}}$.

Definición 2.2. Un Espacio de Probabilidad No Conmutativo es un par (\mathcal{A}, φ) con \mathcal{A} una álgebra unitaria y φ un funcional lineal unitario

$$\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi(1_{\mathcal{A}}) = 1.$$

Los elementos $a \in \mathcal{A}$ son variables aleatorias no conmutativas o solo variables aleatorias en (\mathcal{A}, φ) .

Se dice que φ es tracial si cumple con la propiedad

$$\varphi(ab) = \varphi(ba), \quad \forall \quad a, b \in \mathcal{A}.$$

Definición 2.3. Sea (\mathcal{A}, φ) un espacio de probabilidad no conmutativo, decimos que φ **es no degenerado** si $\varphi(yx) = 0$ para todo $y \in \mathcal{A}$ implica que $x = 0$ y $\varphi(xy) = 0$ para todo $y \in \mathcal{A}$ implica que $x = 0$.

Definición 2.4. Si \mathcal{A} está equipada con la operación antilineal

$$* : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \text{ si } (a^*)^* = a \text{ y } (ab)^* = b^*a^*, \quad \forall \quad a, b \in \mathcal{A},$$

diremos que \mathcal{A} es una $*$ -álgebra.

Definición 2.5. Sea \mathcal{A} una $*$ -álgebra.

- La variable aleatoria $a \in \mathcal{A}$ es autoadjunta si $a = a^*$.
- La variable aleatoria $u \in \mathcal{A}$ es unitaria si $u^*u = uu^* = 1$.
- La variable aleatoria $a \in \mathcal{A}$ es normal si $a^*a = aa^*$.

Definición 2.6. Sea (\mathcal{A}, φ) un espacio de probabilidad y \mathcal{A} una $*$ -álgebra

1) El estado φ es **positivo** si

$$\varphi(a^*a) \geq 0, \quad \forall \quad a \in \mathcal{A},$$

en este caso llamamos a (\mathcal{A}, φ) un **$*$ -espacio de probabilidad**.

2) Sea (\mathcal{A}, φ) un $*$ -espacio de probabilidad no conmutativo, el estado φ se dirá **fiel** si

$$a \in \mathcal{A}, \varphi(a^*a) = 0 \implies a = 0.$$

3) Sea (\mathcal{A}, φ) un $*$ -espacio de probabilidad, el estado φ es autoadjunto, si tiene la propiedad

$$\varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)}, \quad \forall a \in \mathcal{A}.$$

Proposición 2.7. Si (\mathcal{A}, φ) es un $*$ -espacio de probabilidad, se cumple que

$$|\varphi(b^*a)|^2 \leq \varphi(a^*a)\varphi(b^*b), \quad \forall a, b \in \mathcal{A},$$

que comúnmente es llamada la **desigualdad de Cauchy-Schwarz** para el funcional φ .

La demostración es exactamente igual que para el caso usual.

Ejemplo 2.8. A continuación se presentan algunos espacios de probabilidad no conmutativos.

(1) Sea $\mathcal{A} = L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y sea φ definida por

$$\varphi(a) = \int_{\Omega} a(\omega) dP(\omega), \quad a \in \mathcal{A},$$

entonces (\mathcal{A}, φ) es un $*$ -espacio de probabilidad (la $*$ -operación sobre \mathcal{A} es la operación compleja-conjugación de una función compleja).

(2) Sea d un entero positivo, y $M_d(\mathbb{C})$ la álgebra de matrices complejas de tamaño $d \times d$ con la multiplicación usual de matrices, y sea $tr : M_d(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ la traza normalizada,

$$tr(a) = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \alpha_{ii} \quad \text{para } \alpha = (\alpha)_{i,j=1}^d \in M_d(\mathbb{C}),$$

entonces $(M_d(\mathbb{C}), tr)$ es un $*$ -espacio de probabilidad (donde la $*$ -operación está dada por la transpuesta de la matriz y la conjugación compleja de las entradas).

(3) Sea G un grupo, se define $\mathbb{C}G$ como el álgebra del grupo G . Esto es, $\mathbb{C}G$ es un espacio vectorial complejo que tiene una base indexada por los elementos de G , y sus operaciones de multiplicación y $*$ -operación se definen de manera natural:

$$\mathbb{C}G := \left\{ \sum_{g \in G} \alpha_g g \mid \alpha_g \in \mathbb{C} \text{ con un número finito de } \alpha_g \neq 0 \right\}$$

con

$$\left(\sum \alpha_g g \right) \cdot \left(\sum \beta_h h \right) := \sum_{g,h} \alpha_g \beta_h (gh) = \sum_{k \in G} \left(\sum_{g,h:gh=k} \alpha_g \beta_h \right) k$$

y

$$\left(\sum \alpha_g g \right)^* := \sum \tilde{\alpha}_g g^{-1}.$$

Sea e la unidad de G . El funcional $\tau_G : \mathbb{C}G \rightarrow \mathbb{C}$ definido por

$$\tau_G \left(\sum \alpha_g g \right) := \alpha_e,$$

es llamada la traza canónica de $\mathbb{C}G$ y $(\mathbb{C}G, \tau_G)$ es un $*$ -espacio de probabilidad.

Es fundamental considerar el concepto de $*$ -distribución para un elemento arbitrario \mathbf{a} en un $*$ -espacio de probabilidad (\mathcal{A}, φ) . Consideremos $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$ normal, es decir, que $\mathbf{a}^* \mathbf{a} = \mathbf{a} \mathbf{a}^*$ el caso más simple de las $*$ -distribuciones. En este caso la $*$ -subálgebra unitaria de \mathcal{A} generada por \mathbf{a} es

$$\mathcal{A} = \text{span}\{\mathbf{a}^k (\mathbf{a}^*)^l \mid k, l \geq 0\}.$$

La $*$ -distribución de \mathbf{a} tiene como objetivo tener un seguimiento de los valores $\varphi(\mathbf{a}^k (\mathbf{a}^*)^l)$ en donde k, l corren en $\mathbb{N} \cup \{0\}$, tratando siempre de tener una medida de probabilidad compacta y con soporte en \mathbb{C} .

Definición 2.9 (Distribución en sentido analítico). *Sea (\mathcal{A}, φ) un $*$ -espacio de probabilidad y sea \mathbf{a} un elemento normal de \mathcal{A} . Si existe una medida de probabilidad con soporte compacto μ en \mathbb{C} tal que*

$$\int z^k \bar{z}^l d\mu(z) = \varphi(\mathbf{a}^k (\mathbf{a}^*)^l), \quad \forall k, l \in \mathbb{N},$$

entonces μ está únicamente determinada y es la medida de probabilidad de la $*$ -distribución de \mathbf{a} .

Definición 2.10. Sea μ una medida de probabilidad sobre \mathbb{R} con momentos

$$m_n = \int_{\mathbb{R}} t^n d\mu(t)$$

decimos que μ está determinada por sus momentos, si μ es la única medida de probabilidad ν sobre \mathbb{R} tal que:

$$\int_{\mathbb{R}} t^n d\nu(t) = m_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \nu = \mu.$$

Definición 2.11. Sean $(\mathcal{A}_N, \varphi_N)$ con $N \in \mathbb{N}$ y (\mathcal{A}, φ) espacios de probabilidad no conmutativos y considere $a_N \in \mathcal{A}_N$ para cada $N \in \mathbb{N}$ y $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$. Decimos que a_N **converge en distribución** hacia \mathbf{a} cuando $N \rightarrow \infty$ y lo denotaremos por

$$a_N \xrightarrow{d} \mathbf{a},$$

si tenemos que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \varphi_N(a_N^n) = \varphi(\mathbf{a}^n), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Definición 2.12. Un **morfismo** entre dos $*$ -espacios de probabilidad (\mathcal{A}, φ) y (\mathcal{B}, ψ) es un homomorfismo de la $*$ -álgebra unitaria $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ con la propiedad de que $\psi \circ \Phi = \varphi$.

Notación 2.13. Sea s un entero positivo.

- (1) Denotemos por $\mathbb{C}\langle X_1, \dots, X_s \rangle$ el álgebra unitaria libre generada por s indeterminados no-conmutadores X_1, \dots, X_s . Los monomios de la forma $X_{r_1}, X_{r_2}, \dots, X_{r_n}$ en donde $n \geq 0$ y $1 \leq r_1, \dots, r_n \leq s$ dan una base lineal para $\mathbb{C}\langle X_1, \dots, X_s \rangle$ y la multiplicación de dos monomios está dado por la yuxtaposición.
- (2) Sea A una álgebra unitaria, y sea a_1, \dots, a_s elementos de \mathcal{A} . Para cada $P \in \mathbb{C}\langle X_1, \dots, X_s \rangle$ denotemos por $P(a_1, \dots, a_s)$ los elementos de \mathcal{A} que se obtienen de reemplazar X_1, \dots, X_s con a_1, \dots, a_s , respectivamente, en la escritura explícita de P . Equivalentemente,

$$P \in \mathbb{C}\langle X_1, \dots, X_s \rangle \longmapsto p(a_1, \dots, a_s) \in \mathcal{A},$$

es el homomorfismo de álgebras unitarias únicamente determinada por el hecho de mapear X_r a a_r , para $1 \leq r \leq s$.

Definición 2.14. Sea (\mathcal{A}, φ) un espacio de probabilidad no conmutativo y sean a_1, \dots, a_s elementos de \mathcal{A}

- La familia

$$\{\varphi(a_{r_1} \cdots a_{r_n}) \mid n \geq 1, 1 \leq r_1, \dots, r_n \leq s\},$$

es llamada la **familia de momentos conjunta** de a_1, \dots, a_s .

- El funcional lineal $\mu : \mathbb{C}\langle X_1, \dots, X_s \rangle \rightarrow \mathbb{C}$ definido por

$$\mu(P) := \varphi(P(a_1, \dots, a_s)), \quad P \in \mathbb{C}\langle X_1, \dots, X_s \rangle,$$

es llamada la **distribución conjunta** de a_1, \dots, a_s en (\mathcal{A}, φ) .

Ejemplo 2.15. (1) Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y sean $f_1, \dots, f_s : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ variables aleatorias acotadas. Entonces f_1, \dots, f_s son al mismo tiempo elementos del espacio de probabilidad no conmutativo $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ que aparece en el ejemplo 2.8(1). La distribución conjunta μ de f_1, \dots, f_s en $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ está determinada por la fórmula

$$\mu(X_{r_1} \cdots X_{r_n}) = \int_{\Omega} f_{r_1}(\omega) \cdots f_{r_n}(\omega) dP(\omega),$$

para cada $n \geq 1$ y $1 \leq r_1, \dots, r_n \leq s$.

(2) Sea d un entero positivo, y consideremos el $*$ -espacio de probabilidad no conmutativo $(M_d(\mathbb{C}), tr)$ del ejemplo 2.8(2). Sean $A_1, A_2 \in M_d(\mathbb{C})$ matrices hermitianas. Su distribución conjunta $\mu : \mathbb{C}\langle X_1, X_2 \rangle \rightarrow \mathbb{C}$ esta determinada por la fórmula

$$\mu(X_{r_1} \cdots X_{r_n}) = tr(A_{r_1} \cdots a_{r_n}), \quad \forall n \geq 1, \quad 1 \leq r_1, \dots, r_n \leq 2,$$

a menos que A_1, A_2 conmuten, el funcional μ no puede ser reemplazado por un objeto más simple (como una medida de probabilidad en \mathbb{R}^2) que registre la misma información.

Definición 2.16. Sea (\mathcal{A}, φ) un $*$ -espacio de probabilidad, sea x un elemento autoadjunto de \mathcal{A} y sea r un entero positivo. Si x tiene distribución igual a $\frac{2}{\pi r^2} \sqrt{r^2 - t^2} dt$ sobre el intervalo $[-r, r]$, entonces decimos que x es un **elemento semicircular** de radio r .

Observación 2.17. (1) la gráfica de la función $t \in [-r, r] \mapsto \frac{2}{\pi r^2} \sqrt{r^2 - t^2}$ no es exactamente un semicírculo pero es una semielipse.

(2) Los elementos semicirculares de radio 2 son llamados **semicirculares estándar**, son normalizados por la varianza. Es inmediato que, un elemento semicircular x de radio r tiene varianza

$$\text{Var}(x) := \varphi(x^2) - \varphi(x)^2 \quad \text{dado por} \quad \text{Var}(x) = \frac{r^2}{4}.$$

2.2. Independencia Libre

Definición 2.18. Sea (\mathcal{A}, φ) un Espacio de Probabilidad no Conmutativo, y sea I un conjunto de índices fijos.

- Las subálgebras unitarias $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ son **independientes tensorialmente**, si las subálgebras \mathcal{A}_i conmutan (es decir, $ab = ba$ para todo $a \in \mathcal{A}_i$ y todo $a \in \mathcal{A}_j$ y todos $i, j \in I$ con $i \neq j$) y si φ se factoriza la siguiente manera:

$$\varphi \left(\prod_{j \in J} a_j \right) = \prod_{j \in J} \varphi(a_j),$$

para todos los subconjuntos finitos $J \subset I$ y todo $a_j \in \mathcal{A}_j$ ($j \in J$).

- La independencia tensorial (o clásica) de variables aleatorias se define por la independencia tensorial de las álgebras unitarias generadas; por lo que si a y b conmutan y sus momentos mixtos se factorizan diremos que a y b son tensorialmente independientes, es decir

$$ab = ba \quad \text{y} \quad \varphi(a^n b^m) = \varphi(a^n) \varphi(b^m), \quad \forall \quad n, m \geq 0.$$

Definición 2.19. Sea (\mathcal{A}, φ) una álgebra unitaria con un funcional lineal unitario. Suponga que $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_s$ son subálgebras unitarias. Decimos que $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_s$ son **libremente independientes** (o solo libres) con respecto a φ si para cada $r \geq 2$ y $a_1, \dots, a_r \in \mathcal{A}$ tal que

- ◊ $\varphi(a_i) = 0$ para $i = 1, \dots, r$,
- ◊ $a_i \in \mathcal{A}_{j_i}$ con $1 \leq j_i \leq s$ para $i = 1, \dots, r$,
- ◊ $j_1 \neq j_2, j_2 \neq j_3, \dots, j_{r-1} \neq j_r$.

Tenemos

$$\varphi(a_1, \dots, a_r) = 0.$$

Es decir, el producto alternante de los elementos centrados es centrado.

Definición 2.20. 1) Sea (\mathcal{A}, φ) un espacio de probabilidad no conmutativo. Los elementos $a_1, \dots, a_s \in \mathcal{A}$ se dicen **libres** o **libremente independientes** si las subálgebras unitarias generadas $\mathcal{A}_i = \text{alg}(1, a_i)$ para $i = 1, \dots, s$ son libres en \mathcal{A} con respecto a φ .

2) Sea (\mathcal{A}, φ) un $*$ -espacio de probabilidad, entonces decimos que $a_1, \dots, a_s \in \mathcal{A}$ son $*$ -libres si las $*$ -subálgebras unitarias generadas $\mathcal{B}_i = \text{alg}(1, a_i, a_i^*)$ para $i = 1, \dots, s$ son libres en \mathcal{A} con respecto a φ .

Lema 2.21. Sea (\mathcal{B}, φ) un espacio de probabilidad no conmutativo. Consideremos subálgebras unitarias $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_s \subset \mathcal{B}$ libres. Sea \mathcal{A} el álgebra generada por $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_s$. Entonces $\varphi|_{\mathcal{A}}$ está determinado por $\varphi|_{\mathcal{A}_1}, \dots, \varphi|_{\mathcal{A}_s}$ y la condición de independencia libre.

Demostración. Los elementos del álgebra generada \mathcal{A} son combinaciones lineales de palabras de la forma $a_1 \cdots a_s$ con $a_j \in \mathcal{A}_{i_j}$ para algún $i_j \in \{1, \dots, s\}$ que cumplen la condición de que los elementos vecinos provienen de diferentes subálgebras.

Mostraremos que $\varphi(a_1 \cdots a_s)$ está únicamente determinado por $\varphi|_{\mathcal{A}_1}, \dots, \varphi|_{\mathcal{A}_s}$.

La demostración se hará por inducción sobre k . El caso $k = 1$ es claro porque $a_1 \in \mathcal{A}_{i_1}$. Ahora supongamos que tenemos una palabra de la forma $a_1 a_2$ con $a_1 \in \mathcal{A}_{i_1}$ y $a_2 \in \mathcal{A}_{i_2}$ con $i_1 \neq i_2$. Por definición de independencia libre se tiene que

$$\varphi[(a_1 - \varphi(a_1)1)(a_2 - \varphi(a_2)1)] = 0,$$

pero

$$(a_1 - \varphi(a_1)1)(a_2 - \varphi(a_2)1) = a_1 a_2 - \varphi(a_2) a_1 - \varphi(a_1) a_2 + \varphi(a_1) \varphi(a_2) 1,$$

entonces,

$$\varphi(a_1 a_2) = \varphi[\varphi(a_2)a_1 + \varphi(a_1)a_2 - \varphi(a_1)\varphi(a_2)] = \varphi(a_1)\varphi(a_2),$$

continuando de esta manera, sabemos que $\varphi(a_1^\circ \cdots a_s^\circ) = 0$ por la definición de libertad, donde $a_j^\circ = a_j - \varphi(a_j)1$ es una variable aleatoria centrada.

Entonces

$$\varphi(a_1^\circ, \dots, a_k^\circ) = \varphi(a_1 \cdots a_s) + \text{términos de orden inferior en } \varphi,$$

en donde los términos de orden inferior son tratados por la hipótesis de inducción. \square

Notación 2.22. La operación de pasar de una variable aleatoria \mathbf{a} a

$$\mathbf{a}^\circ := \mathbf{a} - \varphi(\mathbf{a})1,$$

es usualmente llamada el **centrado** de \mathbf{a} , en donde 1 es la unidad de la álgebra.

Ejemplo 2.23. Consideremos (\mathcal{A}, φ) un espacio de probabilidad no conmutativo, y $\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}}$ dos subálgebras libres. Para $a, a_1, a_2 \in \tilde{\mathcal{A}}$ y $b, b_1, b_2 \in \tilde{\mathcal{B}}$ calcularemos concretamente algunos momentos mixtos de tamaño pequeño. El truco principal es reducir un momento mixto general a los especiales considerados en la definición de independencia libre al central las variables involucradas.

- (1) De acuerdo a la definición de independencia libre, se tiene directamente que $\varphi(ab) = 0$ si $\varphi(a) = 0$ y $\varphi(b) = 0$. Para calcular $\varphi(ab)$ en general se centran las variables como en la demostración del lema anterior:

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi((a - \varphi(a)1)(b - \varphi(b)1)) \\ &= \varphi(ab) - \varphi(a)1\varphi(b) - \varphi(a)\varphi(1b) + \varphi(a)\varphi(b)\varphi(1) \\ &= \varphi(ab) - \varphi(a)\varphi(b), \end{aligned}$$

implica que

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b), \quad \text{si } a \text{ y } b \text{ son libres.}$$

- (2) Siguiendo el mismo camino podemos escribir

$$\varphi((a_1 - \varphi(a_1)1)(b - \varphi(b)1)(a_2 - \varphi(a_2)1)) = 0,$$

lo que implica que

$$\varphi(a_1 b a_2) = \varphi(a_1 a_2)\varphi(b) \quad \text{si } \{a_1, a_2\}, \text{ y } \{b\} \text{ son libres.}$$

Proposición 2.24. *Sea (\mathcal{A}, φ) un espacio de probabilidad no conmutativo. La subálgebra de escalares $\mathbb{C}1$ es libre de cualquier otra subálgebra unitaria $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$.*

Demostración. Consideremos a_1, \dots, a_k como en la definición de independencia libre, con $k \geq 2$ (el caso $k = 1$ es claro). Entonces tenemos al menos un $a_j \in \mathbb{C}1$ con $\varphi(a_j) = 0$, por lo que $a_j = 0$ en consecuencia $a_1 \cdots a_k = 0$ y así $\varphi(a_1 \cdots a_k) = 0$. \square

Lema 2.25. *Sea (\mathcal{A}, φ) un espacio de probabilidad no conmutativo, y sea $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ una familia de subálgebras unitarias de \mathcal{A} independientemente libres. Sean a_1, \dots, a_k elementos de las álgebras $\mathcal{A}_{i(1)}, \dots, \mathcal{A}_{i(k)}$, respectivamente, en donde los índices $i(1), \dots, i(k) \in I$ son tales que*

$$i(1) \neq i(2), \dots, i(k-1) \neq i(k),$$

y en donde $\varphi(a_1) = \dots = \varphi(a_k) = 0$. De la misma manera, sean b_1, \dots, b_l elementos en $\mathcal{A}_{j(1)}, \dots, \mathcal{A}_{j(l)}$, respectivamente, tales que

$$\varphi(b_1) = \dots = \varphi(b_l) = 0.$$

Entonces, tenemos que

$$\varphi(a_1 \cdots a_k b_l \cdots b_1) = \begin{cases} \varphi(a_1 b_1) \cdots \varphi(a_k b_k), & \text{si } k = l, i(1) = j(1), \dots, i(k) = j(l) \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Demostración. Si tenemos $i(k) \neq j(l)$, entonces

$$\varphi(a_1 \cdots a_k b_l \cdots b_1) = 0,$$

por otro lado, si consideramos $i(k) = j(l)$, obtenemos que

$$\begin{aligned} \varphi(a_1 \cdots a_k b_l \cdots b_1) &= \varphi(a_1 \cdots a_{k-1} \cdot ((a_k b_l)^\circ + \varphi(a_k b_l)1) \cdot b_{l-1} \cdots b_1) \\ &= 0 + \varphi(a_k b_l) \cdot \varphi(a_1 \cdots a_{k-1} b_{l-1} \cdots b_1). \end{aligned}$$

\square

Proposición 2.26. *Sea (\mathcal{A}, φ) un espacio de probabilidad no conmutativo, y sea $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ una familia de subálgebras unitarias de \mathcal{A} independientemente libres, y sea \mathcal{B} una subálgebra de \mathcal{A} generada por $\bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i$. Si $\varphi|_{\mathcal{A}_i}$ es una traza para cada $i \in I$, entonces $\varphi|_{\mathcal{B}}$ es una traza.*

Demostración. Observemos que un elemento a en \mathcal{B} puede escribirse como una combinación lineal de 1 y elementos de la forma $a_1 \cdots a_k$ con $k \geq 1$, $a_p \in \mathcal{A}_{i(p)}$ tales que $i(1) \neq i(2) \neq \dots \neq i(k)$ y $\varphi(a_1) = \dots = \varphi(a_k) = 0$.

Queremos demostrar que $\varphi(ab) = \varphi(ba)$ para todo $a, b \in \mathcal{B}$, para ello es suficiente tomar $a = a_1 \cdots a_k$ y $b = b_1 \cdots b_l$ con $a_p \in \mathcal{A}_{i(p)}$ y $b_q \in \mathcal{A}_{j(q)}$ en donde $i(1) \neq i(2) \neq \dots \neq i(k)$ y $j(1) \neq j(2) \neq \dots \neq j(l)$ y tales que $\varphi(a_1) = \dots = \varphi(a_k) = 0$ y $\varphi(b_1) = \dots = \varphi(b_l) = 0$. Aplicando el Lema previo 2.25 obtenemos

$$\varphi(a_1 \cdots a_k b_l \cdots b_1) = \delta_{kl} \cdot \delta_{i(k)j(k)} \cdots \delta_{i(1)j(i)} \cdot \varphi(a_1 b_1) \cdots \varphi(a_k b_k)$$

y

$$\varphi(b_l \cdots b_1 a_1 \cdots a_k) = \delta_{kl} \cdot \delta_{j(1)i(1)} \cdots \delta_{j(l)i(l)} \cdot \varphi(b_l a_l) \cdots \varphi(b_1 a_1).$$

La afirmación se sigue de suponer que φ es una traza en cada \mathcal{A}_i , esto es, que $\varphi(a_p b_p) = \varphi(b_p a_p)$ para todo p . \square

Definición 2.27. *Sea S un conjunto finito totalmente ordenado.*

- (1) *Llamamos a $\pi = \{V_1, \dots, V_r\}$ una partición del conjunto S si y sólo si π es una descomposición de S en conjuntos no vacíos y disjuntos V_i , es decir,*

$$V_i \neq \emptyset, \quad V_i \cap V_j = \emptyset \quad (i \neq j) \quad \text{y} \quad V_1 \cup \dots \cup V_r = S.$$

*Llamamos a V_1, \dots, V_r los **Bloques** de π . El número de bloques de π es denotado por $|\pi|$. Dados dos elementos $p, q \in S$, escribiremos $p \sim_\pi q$ si p y q pertenecen al mismo bloque de π .*

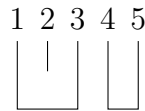
- (2) *El conjunto de todas las particiones de S las denotaremos por $\mathcal{P}(S)$. En el caso especial en que $S = \{1, \dots, n\}$, lo denotaremos por $\mathcal{P}(n)$.*

- (3) $\mathcal{P}(n)$ se convierte en una retícula si introducimos el siguiente orden parcial (llamado **orden de refinamiento inverso**): $\pi \leq \sigma$ si cada bloque de σ es una unión de bloques de π . Podemos denotar el elemento más pequeño de $\mathcal{P}(n)$ por 0_n que consiste de n bloques y el elemento más grande en $\mathcal{P}(n)$ por 1_n que consiste de un sólo bloque.
- (4) Llamamos a $\pi \in \mathcal{P}(n)$ una partición que se **cruza** si existen $1 \leq p_1 < q_1 < p_2 < q_2 \leq n$ tales que $p_1 \sim_\pi p_2 \not\sim_\pi q_1 \sim_\pi q_2$.
- (5) Si el inciso (4) no ocurre, decimos que π **no se cruza**. El conjunto de todas las particiones que no se cruzan de S se denota por $NC(S)$. En el caso especial que $S = \{1, \dots, n\}$, lo denotamos por $NC(n)$.

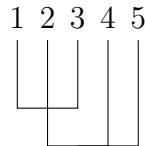
Un ejemplo para el orden de refinamiento inverso es el siguiente:

$$\{\{1, 3\}, \{2\}, \{4\}\} \leq \{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}.$$

Una partición π se puede representar gráficamente de forma lineal, escribiendo todos los elementos del conjunto S de manera lineal y escribiendo una línea vertical de cada elemento, además si los elementos están en un mismo bloque se unen con una línea horizontal. Por ejemplo, considere la partición $\pi = \{\{1, 3\}, \{2\}, \{4, 5\}\}$, decir que “no se cruzan” se vuelve bastante evidente en su representación gráfica



Mientras $\pi = \{\{1, 3\}, \{2, 4, 5\}\}$ se cruza



Consideremos ahora la colección de todas las particiones $\mathcal{P}(n)$ para todo n ,

$$\mathcal{P} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}(n),$$

y en un marco de un poset localmente finito en donde existe la noción combinatorial de una incidencia de álgebra que es el conjunto de funciones especiales de dos argumentos para esas particiones de retícula: la *álgebra de incidencia* consiste de todas las funciones

$$f : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\mathcal{P}(n) \times \mathcal{P}(n)) \rightarrow \mathbb{C},$$

sujeto a la siguiente condición:

$$f(\pi, \sigma) = 0, \quad \text{cuando } \pi \not\leq \sigma.$$

En algunas ocasiones, también podemos considerar funciones de un sólo elemento, estas son restricciones de las funciones de dos variables como en el caso anterior donde el primer argumento es igual a algún 0_n , es decir,

$$f(\pi) = f(0_n, \pi), \quad \text{para } \pi \in \mathcal{P}(n).$$

En esta incidencia tenemos una convolución canónica \star : Para f y g funciones como las anteriores, definimos $f \star g$ por

$$(f \star g)(\pi, \sigma) := \sum_{\substack{\tau \in \mathcal{P}(n) \\ \pi \leq \tau \leq \sigma}} f(\pi, \tau)g(\tau, \sigma), \quad \text{para } \pi \leq \sigma \in NC(n).$$

Las siguientes funciones especiales de la incidencia de la álgebra son de gran interés: el elemento neutral δ para la convolución combinatorial canónica está dado por

$$\delta(\pi, \sigma) := \begin{cases} 1, & \text{si } \pi = \sigma, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La *función Zeta* está definida por

$$Zeta(\pi, \sigma) := \begin{cases} 1, & \text{si } \pi \leq \sigma, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es fácil verificar que la función Zeta posee un inverso que es llamado la *función de Möbius* que denotaremos por *Moeb* y está definida por

$$Moeb \star Zeta = Zeta \star Moeb = \delta.$$

Consideremos ahora el conjunto $NC(n)$, este conjunto también es una retícula con respecto al refinamiento inverso. Por supuesto, tiene un elemento más

pequeño y un elemento más grande que denotaremos por 0_n y 1_n respectivamente. Análogamente, podemos considerar la colección de todas las retículas de particiones que no se cruzan para todo n ,

$$NC := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} NC(n),$$

y el álgebra de incidencia como en el conjunto anterior de funciones especiales con dos argumentos para estas retículas: el *álgebra de incidencia de las particiones que no se cruzan* consiste de todas las funciones

$$f : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (NC(n) \times NC(n)) \rightarrow \mathbb{C},$$

sujeto a la condición siguiente:

$$f(\pi, \sigma) = 0, \quad \text{cuando } \pi \not\leq \sigma.$$

Otra vez, tenemos la convolución canónica \star sobre esta álgebra de incidencia: Para las funciones f y g como antes, definimos $f \star g$ por

$$(f \star g)(\pi, \sigma) := \sum_{\substack{\tau \in \mathcal{P}(n) \\ \pi \leq \tau \leq \sigma}} f(\pi, \tau)g(\tau, \sigma), \quad \text{para } \pi \leq \sigma \in NC(n).$$

Como antes, tenemos las siguientes funciones especiales: el elemento neutral δ para la convolución canónica está dado por

$$\delta(\pi, \sigma) := \begin{cases} 1, & \text{si } \pi = \sigma, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La *función zeta* está definida por

$$zeta(\pi, \sigma) := \begin{cases} 1, & \text{si } \pi \leq \sigma, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Nuevamente la función *zeta* posee un inverso que llamaremos *función de Möbius*: μ está definida por

$$\mu \star zeta = zeta \star \mu = \delta.$$

Definición 2.28. La transformación complemento $K : NC(n) \rightarrow NC(n)$ se define considerando los números adicionales $\bar{1}, \dots, \bar{n}$ entrelazados entre ellos $1, \dots, n$ de la siguiente manera:

$$1\bar{1}2\bar{2}\dots n\bar{n}.$$

Sea π una partición de $\{1, \dots, n\}$ que no se cruza. Entonces el **complemento de Kreweras** $K(\pi) \in NC(\bar{1}, \dots, \bar{n}) \cong NC(n)$ es definido por el elemento más grande entre aquellos $\sigma \in NC(\bar{1}, \dots, \bar{n})$ que tiene la propiedad de que

$$\pi \cup \sigma \in NC(\bar{1}, \dots, \bar{n}).$$

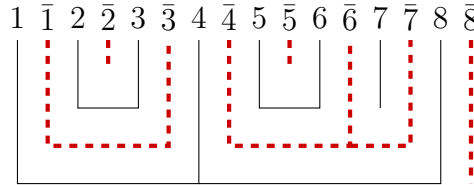
Ejemplo 2.29. Considere la partición

$$\pi := \{\{1, 4, 8\}, \{2, 3\}, \{5, 6\}, \{7\}\} \in NC(8).$$

Para el complemento $K(\pi)$ obtenemos

$$K(\pi) = \{\{1, 3\}, \{2\}, \{4, 6, 7\}, \{5\}, \{8\}\},$$

que lo podemos observar en la representación gráfica:



Definición 2.30. Sea (\mathcal{A}, φ) un $*$ -espacio de probabilidad. Una familia autoadjunta $(s_i)_{i \in I} \subset \mathcal{A}$ es llamada una **familia semicircular** de covarianza $C = (c_{ij})_{i,j \in I}$ si $C \geq 0$ y para algún $n \geq 1$ y alguna n -tupla $i_1, \dots, i_n \in I$ se tiene que

$$\varphi(s_{i_1} \cdots s_{i_n}) = \sum_{\pi \in NC_2(n)} \varphi_\pi[s_{i_1}, \dots, s_{i_n}],$$

en donde

$$\varphi_\pi[s_{i_1}, \dots, s_{i_n}] = \prod_{(p,q) \in \pi} c_{i_p i_q}.$$

$NC_2(n)$ indica las particiones por pares que no se cruzan.

Ejemplo 2.31. (1) Para los primeros tres momentos se tiene que:

$$\varphi(s_a s_b) = c_{ab},$$

$$\varphi(s_a s_b s_c s_d) = c_{ab} c_{cd} + c_{ad} c_{bc},$$

$$\varphi(s_a s_b s_c s_d s_e s_f) = c_{ab} c_{cd} c_{ef} + c_{ab} c_{cf} c_{de} + c_{ad} c_{bc} c_{ef} + c_{af} c_{bc} c_{de} + c_{af} c_{be} + c_{cd}.$$

(2) Si I consiste solo de un elemento, entonces la definición anterior se reduce, por supuesto, a la definición de un elemento semicircular. En general, cada elemento s_j de una familia semicircular es un elemento semicircular. Sin embargo, en general s_j no es libre.

Definición 2.32. Sea (\mathcal{A}, φ) un $*$ -espacio de probabilidad. Un **sistema circular** en (\mathcal{A}, φ) es una familia x_1, \dots, x_k de elementos autoadjuntos de \mathcal{A} tal que:

(1) cada x_1, \dots, x_k es un elemento semicircular estándar en (\mathcal{A}, φ) .

(2) x_1, \dots, x_k son libres con respecto a φ .

Proposición 2.33. Sea $(s_i)_{i \in I}$ una familia semicircular de covarianza $(c_{ij})_{i,j \in I}$ y considere una descomposición disjunta $I = \bigcup_{p=1}^d I_p$. Entonces, se sigue que los siguientes dos estados son equivalentes.

(1) Los conjuntos $\{s_i | i \in I_1\}, \dots, \{s_i | i \in I_d\}$ son independientemente libres.

(2) $c_{ij} = 0$ cuando $i \in I_p$ y $j \in I_q$ con $p \neq q$.

Corolario 2.34. Considere una familia semicircular $(s_i)_{i \in I}$ de covarianza $(c_{ij})_{i,j \in I}$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes

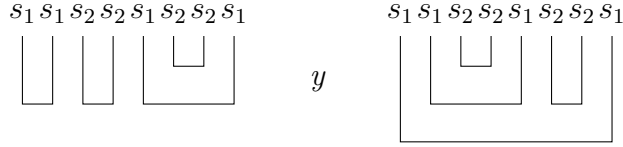
(1) La matriz de covarianza $(c_{ij})_{i,j \in I}$ es diagonal.

(2) Las variables aleatorias $(s_i)_{i \in I}$ son libres.

Ejemplo 2.35. Consideremos s_1 y s_2 dos elementos circulares libres. Asumamos que ambos tienen varianza 1. Queremos calcular sus momentos mixtos, que están dados por el conteo de la unión de dos elementos similares, esto es, s_1 con s_1 y s_2 con s_2 ; los bloques conectados s_1 con s_2 no están permitidos y además no deben de cruzarse. Así, se tiene que

$$\varphi(s_1 s_1 s_2 s_2 s_1 s_2 s_2 s_1) = 2,$$

porque hay dos contribuciones de pares que no se cruzan, tales son



Definición 2.36. Sea (\mathcal{A}, φ) un espacio de probabilidad no conmutativo. Los correspondientes cumulantes libres $(\kappa_\pi)_{\pi \in NC}$ son, para cada $n \in \mathbb{N}, \pi \in NC$, funciones multilineales

$$\begin{aligned} \kappa_\pi &\rightarrow \mathcal{A}^n \rightarrow \mathbb{C}, \\ (a_1, \dots, a_n) &\mapsto \kappa_\pi[a_1, \dots, a_n], \end{aligned}$$

que están definidos como sigue:

$$\kappa_\pi[a_1, \dots, a_n] := \sum_{\substack{\sigma \in NC(n) \\ \sigma \leq \pi}} \varphi_\sigma[a_1, \dots, a_n] \mu(\sigma, \pi),$$

en donde μ es la función de Möbius sobre $NC(n)$.

Para $n \leq 1$, escribimos $\kappa_n := \kappa_{1_n}$.

El siguiente resultado nos da una descripción del producto de variables aleatorias libres.

Teorema 2.37. Sea (\mathcal{A}, φ) un espacio de probabilidad no conmutativo y consideremos las variables aleatorias $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathcal{A}$ tales que $\{a_1, \dots, a_n\}$ y $\{b_1, \dots, b_n\}$ son independientemente libres. Entonces tenemos que

$$\varphi(a_1 b_1 a_2 b_2 \cdots a_n b_n) = \sum_{\pi \in NC(n)} \kappa_\pi[a_1, a_2, \dots, a_n] \cdot \varphi_{K(\pi)}[b_1, b_2, \dots, b_n] \quad (2.1)$$

y

$$\kappa_n(a_1 b_1 a_2 b_2 \cdots a_n b_n) = \sum_{\pi \in NC(n)} \kappa_\pi[a_1, a_2, \dots, a_n] \cdot \kappa_{K(\pi)}[b_1, b_2, \dots, b_n]. \quad (2.2)$$

Ejemplo 2.38. (1) Escribiremos explícitamente las fórmulas (2.1) y (2.2) para n pequeño.

Para $n = 1$ tenemos que

$$\varphi(ab) = \kappa_1(a)\varphi(b) \quad y \quad \kappa_1(ab) = \kappa_1(a)\kappa_1(b).$$

Que son sólo versiones de la regla de factorización $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.
Para $N = 2$ tenemos

$$\varphi(a_1 b_1 a_2 b_2) = \kappa_1(a_1)\kappa_1(a_2)\varphi(b_1 b_2) + \kappa_2(a_1 a_2)\varphi(b_1)\varphi(b_2)$$

y

$$\kappa_2(a_1 b_1, a_2 b_2) = \kappa_1(a_1)\kappa_1(a_2)\kappa_2(b_1 b_2) + \kappa_2(a_1 a_2)\kappa_1(b_1)\kappa_1(b_2),$$

que son reformulaciones de:

$$\varphi(a_1 b_1 a_2 b_2) = \varphi(a_1)\varphi(a_2)\varphi(b_1 b_2) + \varphi(a_1 a_2)\varphi(b_1)\varphi(b_2) - \varphi(a_1)\varphi(a_2)\varphi(b_1)\varphi(b_2).$$

(2) Veamos un caso especial de la fórmula (2.1) cuando a_1, \dots, a_n son elementos escogidos de elementos semicirculares s_i libres. Los únicos cumulantes no triviales son $\kappa_2(s_i, s_j) = \delta_{ij}$ y tenemos

$$\varphi(s_{p(1)} b_1 \cdots s_{p(n)} b_n) = \sum_{\pi \in NC_2^{(p)}(n)} \varphi_{K(\pi)}[b_1, \dots, b_n], \quad (2.3)$$

en donde $NC_2^{(p)}(n)$ denota las parejas que no se cruzan de n elementos cuyos bloques solo conectan los p -índices, es decir, solo los elementos circulares.

Definición 2.39. Sean μ y ν medidas de probabilidad en \mathbb{R} con soporte compacto. Sean \mathbf{x} y \mathbf{y} variables aleatorias autoadjuntas en algún \mathbb{C} -espacio de probabilidad tal que \mathbf{x} tiene distribución μ , \mathbf{y} tiene distribución ν , tales que \mathbf{x} y \mathbf{y} son independientemente libres. Entonces la distribución de la suma $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ es llamada la **convolución libre** de μ y ν y se denota por $\mu \boxplus \nu$.

2.3. Independencia Libre y Matrices Aleatorias

Definición 2.40. (1) Una familia de variables aleatorias autoadjuntas x_1, \dots, x_k que están en algún $*$ -espacio de probabilidad $(L^{\infty-}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \mathbb{E})$

es llamada una **familia gaussiana (centrada)**, si su densidad conjunta es gaussiana, es decir, si existe una matriz C positiva $N \times N$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ y todo $1 \leq i(1), \dots, i(k) \leq n$ que

$$\mathbb{E}[x_{i(1)} \cdots x_{i(k)}] = (2\pi)^{-n/2} (\det C)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^n} t_{i(1)} \cdots t_{i(k)} e^{-\frac{1}{2} \langle t, C^{-1}t \rangle} dt_1 \cdots dt_n, \quad (2.4)$$

en donde $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto interno estándar en \mathbb{R}^n . Llamamos a C la **matriz de covarianza** de la familia gaussiana.

(2) Una familia clásica de variables aleatorias complejas a_1, \dots, a_n es una **familia gaussiana compleja** si la colección de sus partes reales e imaginarias $\Re a_1, \Im a_1, \dots, \Re a_n, \Im a_n$ son una familia gaussiana.

Observación 2.41. La ecuación (2.4) es equivalente a decir que la **función característica** del vector aleatorio $x = (x_1, \dots, x_n)$ es de la forma

$$\mathbb{E}[e^{i \langle t, x \rangle}] = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \langle t, Ct \rangle \right\}.$$

Teorema 2.42 (Fórmula de Wick). Sea x_1, \dots, x_n una familia gaussiana. Entonces tenemos que para todo $k \in \mathbb{N}$ y todo $1 \leq i(1), \dots, i(k) \leq N$

$$\mathbb{E}[x_{i(1)} \cdots x_{i(k)}] = \sum_{\pi \in \mathcal{P}_2(k)} \prod_{(r,s) \in \pi} \mathbb{E}[x_{i(r)} x_{i(s)}],$$

en donde $\mathcal{P}_2(k)$ denota el conjunto de todos los pares del bloque del conjunto $\{1, \dots, k\}$. Si $C = (c_{ij})_{i,j=1}^N$ es la matriz de covarianza de la familia gaussiana entonces

$$\mathbb{E}[x_i x_j] = C_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, N.$$

Definición 2.43. Una matriz aleatoria gaussiana autoadjunta es una matriz aleatoria $N \times N$ con $A = A^*$ y tal que sus entradas forman una familia gaussiana que está determinada por la covarianza

$$\mathbb{E}[a_{ij} a_{kl}] = \frac{1}{N} \delta_{ij} \delta_{kl}, \quad i, j, k, l = 1, \dots, N.$$

Observación 2.44. Sea $B = B^*$ una matriz aleatoria autoadjunta de $N \times N$

- Cada entrada se define como

$$b_{ij} = \bar{b}_{ji}, \quad \forall \quad i, j = 1, \dots, N.$$

- Asumimos que las entradas son variables aleatorias gaussianas independientes (reales en la diagonal y complejas arriba de la diagonal) con varianza $\frac{1}{N}$.
- La covarianza para las entradas complejas se define como

$$\mathbb{E}[a_{ij}\bar{a}_{kl}] = \mathbb{E}[a_{ij}a_{lk}] = \frac{1}{N}\delta_{ik}\delta_{jl}, \quad i, j, k, l = 1, \dots, N.$$

Nuestro interés es calcular la distribución de una matriz aleatoria gaussiana autoadjunta, pero calcular sus valores propios no es muy factible; en cambio calcular sus momentos es bastante accesible. Consideremos

$$\varphi := \text{tr} \otimes \mathbb{E},$$

el m -ésimo momento de una matriz aleatoria gaussiana autoadjunta A está dado por

$$\varphi(A^m) = \frac{1}{N} \sum_{i(1), \dots, i(m)=1}^N \mathbb{E}[a_{i(1)i(2)}a_{i(2)i(3)} \cdots a_{i(m)i(1)}],$$

utilizando la fórmula de Wick y la covarianza descrita anteriormente (considerando módulo m , es decir, $i(m+1) := i(1)$)

$$\begin{aligned} \varphi(A^m) &= \frac{1}{N} \sum_{i(1), \dots, i(m)=1}^N \sum_{\pi \in \mathcal{P}_2(m)} \prod_{(r,s) \in \pi} \mathbb{E}[a_{i(r)i(r+1)}a_{i(s)i(s+1)}] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i(1), \dots, i(m)=1}^N \sum_{\pi \in \mathcal{P}_2(m)} \prod_{(r,s) \in \pi} \delta_{i(r)i(s+1)}\delta_{i(s)i(r+1)} \frac{1}{N^{\frac{m}{2}}} \\ &= \frac{1}{N^{1+\frac{m}{2}}} \sum_{\pi \in \mathcal{P}_2(m)} \sum_{i(1), \dots, i(m)=1}^N \prod_{(r,s) \in \pi} \delta_{i(r)i(s+1)}\delta_{i(s)i(r+1)}. \end{aligned}$$

Veamos a π como un 2-ciclo de permutaciones en S_m , es decir, $\pi(r) = s$ y $\pi(s) = r$. Así,

$$\begin{aligned}
\varphi(A^m) &= \frac{1}{N^{1+\frac{m}{2}}} \sum_{\pi \in \mathcal{P}_2(m)} \sum_{i(1), \dots, i(m)=1}^N \prod_{(r,s) \in \pi} \delta_{i(r)i(\pi(r)+1)} \\
&= \frac{1}{N^{1+\frac{m}{2}}} \sum_{\pi \in \mathcal{P}_2(m)} \sum_{i(1), \dots, i(m)=1}^N \prod_{(r,s) \in \pi} \delta_{i(r)i(\gamma\pi(r))}.
\end{aligned}$$

con $\gamma \in S_m$ es la permutación cíclica de un ciclo,

$$\gamma = (1, 2, \dots, m-1, m),$$

identifiquemos $i = (i(1), \dots, i(m))$ con la función $i : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, N\}$, entonces de la definición de $\prod_{(r,s) \in \pi} \delta_{i(r)i(\gamma\pi(r))}$ es obvio, que la función i debe de ser constante sobre los ciclos de la permutación $\gamma\pi$ a fin de que contribuya con un factor 1, en otro caso su contribución será cero. Para cada ciclo de $\gamma\pi$ podemos elegir uno de los números $1, \dots, N$ para el valor constante de i sobre está órbita, y todas esas elecciones son independientes de otras, lo que significa que

$$\sum_{i(1), \dots, i(m)=1}^N \prod_{(r,s) \in \pi} \delta_{i(r)i(\gamma\pi(r))} = N^{\text{número de ciclos de } \gamma\pi}.$$

Notación 2.45. Para una permutación $\sigma \in S_m$ decimos que

$$\#(\sigma) := \text{número de ciclos de } \sigma.$$

Teorema 2.46. Para una matriz aleatoria gaussiana autoadjunta de $N \times N$, se tiene que para todo $m \in \mathbb{N}$

$$\varphi(A^m) = \sum_{\pi \in \mathcal{P}_2(m)} N^{\#(\gamma\pi) - 1 - \frac{m}{2}}.$$

Este tipo de expansión para momentos de matrices aleatorias es usualmente llamada una **expansión de género** [5], debido a que las parejas en S_m también se pueden identificar con superficies orientables y el correspondiente exponente de N se puede expresar (a través de la fórmula de Euler) en términos del género g de la superficie,

$$\#(\gamma\pi) - 1 - m/2 = -2g.$$

Ejemplo 2.47. *Veamos algunos ejemplos. Claramente, no existen emparejamientos de un número de elementos impares, todos los momentos impares de una matriz son cero. Por lo tanto, solo consideraremos potencias de la forma $m = 2k$.*

En el Cuadro 2.1 se muestra la información relevante para poder calcular los primeros tres momentos pares de la matriz A .

m	π	$\gamma\pi$	$\#(\gamma\pi) - 1 - \frac{m}{2}$
2	(1, 2)	(1)(2)	0
4	(1, 2)(3, 4)	(1, 3)(2)(4)	0
	(1, 3)(2, 4)	(1, 4, 3, 2)	-2
	(1, 4)(2, 3)	(1)(2, 4)(3)	0
6	(1, 2)(3, 4)(5, 6)	(1, 3, 5)(2)(4)(6)	0
	(1, 6)(2, 3)(4, 5)	(1)(2, 4, 6)(3)(5)	0
	(1, 3)(2, 4)(5, 6)	(1, 4, 3, 2, 5)(6)	-2
	(1, 4)(2, 3)(5, 6)	(1, 5)(2, 4)(3)(6)	0
	(1, 5)(2, 3)(4, 6)	(1, 6, 5, 2, 4)(3)	-2
	(1, 6)(2, 5)(3, 4)	(1)(2, 6)(3, 5)(4)	0
	(1, 6)(2, 4)(3, 5)	(1)(2, 5, 4, 3, 6)	-2
	(1, 3)(2, 5)(4, 6)	(1, 4)(2, 6, 5, 3)	-2
	(1, 3)(2, 6)(4, 5)	(1, 4, 6, 3, 2)(5)	-2
	(1, 4)(2, 5)(3, 6)	(1, 5, 3)(2, 6, 4)	-2
	(1, 4)(2, 6)(3, 5)	(1, 5, 4, 2)(3, 6)	-2
	(1, 5)(2, 4)(3, 6)	(1, 6, 4, 3)(2, 5)	-2
	(1, 5)(2, 6)(3, 4)	(1, 6, 3, 5, 2)(3)	-2
	(1, 2)(3, 5)(4, 6)	(1, 3, 6, 5, 4)(2)	-2
	(1, 2)(3, 6)(4, 5)	(1, 3)(2)(4, 6)(5)	0

Cuadro 2.1: Momentos de A .

Fuente: Elaboración propia.

Así, tenemos que

$$\begin{aligned}\varphi(A^2) &= 1 \cdot N^0, \\ \varphi(A^4) &= 2 \cdot N^0 + 1 \cdot N^{-2}, \\ \varphi(A^6) &= 5 \cdot N^0 + 10 \cdot N^{-2}.\end{aligned}$$

Notemos que las parejas que contribuyen en el orden principal de N^0 son aquellas que no se cruzan.

Definición 2.48. Sea para cada $N \in \mathbb{N}$, $(\mathcal{A}_N, \varphi_N)$ un espacio de probabilidad no conmutativo. Sea I un conjunto de índices y considere para cada $i \in I$ y cada $N \in \mathbb{N}$ variables aleatorias $a_i^{(N)} \in \mathcal{A}_N$. Sea $I = I_1 \cup \dots \cup I_m$ una descomposición de I en m subconjuntos disjuntos. Decimos que

$$\{a_i^{(N)} | i \in I_1\}, \dots, \{a_i^{(N)} | i \in I_m\},$$

son asintóticamente libres (para $N \rightarrow \infty$) si $(a_i^{(N)})_{i \in I}$ converge en distribución a $(a_i)_{i \in I}$ para algunas variables aleatorias $a_i \in \mathcal{A}$ ($i \in I$) en algún espacio de probabilidad no conmutativo (\mathcal{A}, φ) y si los límites $\{a_i | i \in I_1\}, \dots, \{a_i | i \in I_m\}$ son libres en (\mathcal{A}, φ) .

La independencia libre asintótica es uno de los descubrimientos fundamentales de Voiculescu en la teoría de probabilidad libre. Para tener independencia libre asintótica debemos considerar al menos dos matrices aleatorias, el caso más simple es tomar dos matrices aleatorias gaussianas adjuntas.

Sean $A^{(1)} = (a_{ij}^{(1)})_{i,j=1}^N$ y $A^{(2)} = (a_{ij}^{(2)})_{i,j=1}^N$ dos matrices aleatorias gaussianas. Prescribiremos la distribución conjunta de toda la familia

$$a_{11}^{(1)}, \dots, a_{NN}^{(1)}, a_{11}^{(2)}, \dots, a_{NN}^{(2)},$$

asumiendo que las entradas de la matriz $A^{(1)}$ son independientes de la matriz $A^{(2)}$. La colección de todas las entradas de nuestras matrices forman una familia gaussiana compleja con covarianza

$$\mathbb{E} \left[a_{ij}^{(r)} a_{kl}^{(p)} \right] = \frac{1}{N} \delta_{il} \delta_{jk} \delta_{rp}.$$

El m -ésimo momento de $A^{(1)}$ y $A^{(2)}$ está dado por

$$\begin{aligned}
\varphi(A^{(p(1))} \dots A^{(p(m))}) &= \frac{1}{N} \sum_{i(1), \dots, i(m)=1}^N \mathbb{E} \left[a_{i(1)i(2)}^{(p(1))} a_{i(2)i(3)}^{(p(2))} \dots a_{i(m)i(1)}^{(p(m))} \right] \\
&= \frac{1}{N} \sum_{i(1), \dots, i(m)=1}^N \sum_{\pi \in \mathcal{P}_2(m)} \prod_{(r,s) \in \pi} \mathbb{E} \left[a_{i(r)i(r+1)}^{(p(r))} a_{i(s)i(s+1)}^{(p(s))} \right] \\
&= \frac{1}{N} \sum_{\substack{i(1), \dots, \\ i(m)=1}}^N \sum_{\pi \in \mathcal{P}_2(m)} \prod_{(r,s) \in \pi} \delta_{i(r)i(s+1)} \delta_{i(s)i(r+1)} \delta_{p(r)p(s)} \frac{1}{N^{\frac{m}{2}}} \\
&= \frac{1}{N^{1+\frac{m}{2}}} \sum_{\pi \in \mathcal{P}_2(m)} \sum_{i(1), \dots, i(m)=1}^N \prod_{r=1}^m \delta_{i(r)i(\gamma\pi(r))} \delta_{p(r)p(\pi(r))}.
\end{aligned}$$

Observemos que es el mismo cálculo de momentos para una sola matriz, el factor extra que tenemos es $\prod_{r=1}^m \delta_{p(r)p(\pi(r))}$, que condiciona los emparejamientos de π , no está permitido hacer emparejamientos de una $A^{(1)}$ con una $A^{(2)}$.

Notemos que la expresión $\prod_{r=1}^m \delta_{i(r)i(\gamma\pi(r))} = 1$ ocurrirá siempre y cuando la función i sea constante por bloques. En consecuencia,

$$\sum_{i(1), \dots, i(m)=1}^N \prod_{r=1}^m \delta_{i(r)i(\gamma\pi(r))} \delta_{p(r)p(\pi(r))} = N^{\#(\gamma\pi)}.$$

Notación 2.49. Para $p = (p(1), \dots, p(m))$ tenemos

$$\mathcal{P}_2^{(p)}(m) = \{\pi \in \mathcal{P}_2(m) \mid p(\pi(r)) = p(r) \text{ para todo } r = 1, \dots, m\},$$

pensemos en p como coloraciones de los puntos $1, \dots, m$. También abordaremos los elementos de $\mathcal{P}_2^{(p)}(m)$ como parejas con respecto a la coloración p .

Proposición 2.50. Sean $A^{(1)}$ y $A^{(2)}$ dos matrices aleatorias gaussianas auto-adjuntas. Entonces tenemos para todas las opciones $m \in \mathbb{N}$ y $p(1), \dots, p(m) \in \{1, 2\}$ que

$$\varphi(A^{(p(1))} \dots A^{(p(m))}) = \sum_{\pi \in \mathcal{P}_2^{(p)}(m)} N^{\#(\gamma\pi) - 1 - \frac{m}{2}}.$$

Ejemplo 2.51. Sean $A^{(1)}$ y $A^{(2)}$ dos matrices aleatorias gaussianas autoadjuntas. Consideremos $m = 4$, a continuación se presentan algunos ejemplos.

$$\begin{aligned}\varphi(A^{(1)}A^{(1)}A^{(1)}A^{(1)}) &= 2 \cdot N^0 + 1 \cdot N^{-2} \\ \varphi(A^{(1)}A^{(1)}A^{(2)}A^{(2)}) &= 1 \cdot N^0 + 0 \cdot N^{-2} \\ \varphi(A^{(1)}A^{(1)}A^{(1)}A^{(1)}) &= 0 \cdot N^0 + 1 \cdot N^{-2}.\end{aligned}$$

Como antes, el término principal para $N \rightarrow \infty$ viene dado por las contribuciones de emparejamientos que no se cruzan, pero ahora los emparejamientos sin cruces deben de conectar una $A^{(1)}$ con una $A^{(1)}$ y una $A^{(2)}$ con una $A^{(2)}$. Esta es exactamente la regla para calcular momentos mixtos de un sistema semicircular de dos elementos semicirculares libres (Ejemplo 2.35). Así que tenemos independencia libre asintótica entre dos matrices aleatorias gaussianas independientes. En general, si se consideran n matrices aleatorias gaussianas independientes serán asintóticamente libres.

Teorema 2.52. Sean $A_N^{(1)}, \dots, A_N^{(n)}$, para cada $N \in \mathbb{N}$ una familia de matrices aleatorias gaussianas autoadjuntas independientes de $N \times N$. Entonces $(A_N^{(1)}, \dots, A_N^{(n)})$ converge en distribución a un sistema semicircular (s_1, \dots, s_n) que consiste de n elementos semicirculares estándar libres. En particular, $A_N^{(1)}, \dots, A_N^{(n)}$ son asintóticamente libres.

Podríamos pensar que encontrar independencia libre asintótica está restringida a una clase de distribuciones, como por ejemplo a los elementos semicirculares. Pero es posible encontrar apariencias más generales de independencia libre asintótica en el mundo de matrices aleatorias. En vez de observar la relación entre dos matrices gaussianas, reemplazaremos una de ellas por una matriz “constante” o “no aleatoria” en $M_N(\mathbb{C})$ sin ninguna aleatoriedad, en dónde el estado es la traza tr ya que el valor esperado actúa trivialmente.

Definición 2.53. Sea $(M_N(L^{\infty-}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})), tr \times \mathbb{E})$ un espacio de probabilidad no conmutativo de matrices aleatorias, diremos que las matrices en

$$M_N(\mathbb{C}) \cong M_N(\mathbb{C} \cdot 1_{L^{\infty-}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})}) \subset M_N(L^{\infty-}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}))$$

son **matrices constantes**.

Esperamos una independencia libre asintótica, en consecuencia lo que estamos viendo es una sucesión de matrices constantes D_N , las cuales convergen

en distribución para $N \rightarrow \infty$. Por lo tanto, asumimos la existencia de todos los límites

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{tr}(D_N^m), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Denotemos este límite por un elemento d definido en algún espacio de probabilidad no conmutativo (\mathcal{A}, φ) , es decir, asumimos que $D_N \xrightarrow{\text{distr}} d$.

Notar que, tenemos una gran independencia libre para preescribir los momentos deseados en el límite.

Ahora trataremos de hacer cálculos similares a los anteriores, esta vez considerando una matriz aleatoria A y una matriz constante D , ambas de tamaño $N \times N$ para poder entender los momentos mixtos de A y D . Podemos escribirlos de la forma

$$\varphi(AD^{q(1)}AD^{q(2)} \dots AD^{q(m)})$$

en donde cada $D^{q(i)}$ es alguna potencia de D . Denotemos los entradas de las matriz $D^{q(i)}$ por $d_{ij}^{(i)}$.

$$\begin{aligned} & \varphi(AD^{q(1)}AD^{q(2)} \dots AD^{q(m)}) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{\substack{i(1), \dots, i(m), \\ j(1), \dots, j(m)=1}}^N \mathbb{E}[a_{i(1)j(1)} d_{j(1)i(2)}^{(1)} a_{i(2)j(2)} d_{j(2)i(3)}^{(2)} \dots a_{i(m)j(m)} d_{j(m)i(1)}^{(m)}] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{\substack{i(1), \dots, i(m), \\ j(1), \dots, j(m)=1}}^N \mathbb{E}[a_{i(1)j(1)} a_{i(2)j(2)} \dots a_{i(m)j(m)}] \cdot d_{j(1)i(2)}^{(1)} d_{j(2)i(3)}^{(2)} \dots d_{j(m)i(1)}^{(m)} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{\substack{i(1), \dots, i(m), \\ j(1), \dots, j(m)=1}}^N \sum_{\pi \in \mathcal{P}_2(m)} \prod_{(r,s) \in \Pi} \mathbb{E}[a_{i(r)j(r)} a_{i(s)j(s)}] \cdot d_{j(1)i(\gamma(1))}^{(1)} \dots d_{j(m)i(\gamma(m))}^{(m)} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{\substack{i(1), \dots, i(m), \\ j(1), \dots, j(m)=1}}^N \sum_{\pi \in \mathcal{P}_2(m)} \prod_{(r,s) \in \Pi} \delta_{i(r)j(s)} \delta_{i(s)j(r)} \frac{1}{N^{\frac{m}{2}}} \cdot d_{j(1)i(\gamma(1))}^{(1)} \dots d_{j(m)i(\gamma(m))}^{(m)}. \end{aligned}$$

Nuevamente, identificamos a $\pi \in \mathcal{P}_2(m)$ con una permutación en S_m , y γ la permutación de un solo ciclo en S_m entonces para que quede comprendido, para un π fijo, la expresión

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{i(1), \dots, i(m), \\ j(1), \dots, j(m)=1}}^N \prod_{(r,s) \in \Pi} \delta_{i(r)j(s)} \delta_{i(s)j(r)} \frac{1}{N^{\frac{m}{2}}} \cdot d_{j(1)i(\gamma(1))}^{(1)} \cdots d_{j(m)i(\gamma(m))}^{(m)} \\
&= \sum_{\substack{i(1), \dots, i(m), \\ j(1), \dots, j(m)=1}}^N \prod_{r=1}^m \delta_{i(r)j(\pi(r))} \delta_{i(s)j(r)} \frac{1}{N^{\frac{m}{2}}} \cdot d_{j(1)i(\gamma(1))}^{(1)} \cdots d_{j(m)i(\gamma(m))}^{(m)} \\
&= \sum_{j(1), \dots, j(m)=1}^N d_{j(1)j(\pi\gamma(1))}^{(1)} \cdots d_{j(m)j(\pi\gamma(m))}^{(m)}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.54. Para entenderlo mejor, consideremos $\pi = (1, 4)(2, 3)(5, 6) \in \mathcal{P}_2(6)$ y $\gamma = (1, 2, 3, 4, 5, 6) \in S_6$. Denotemos por $\alpha = \pi\gamma$, al efectuar las operaciones obtenemos que $\alpha = (1, 3)(4, 6)(2)(5) \in S_6$. Entonces se tiene

$$\begin{aligned}
& \sum_{j(1), \dots, j(6)=1}^N d_{j(1)j(\alpha(1))}^{(1)} d_{j(2)j(\alpha(2))}^{(2)} d_{j(3)j(\alpha(3))}^{(3)} d_{j(4)j(\alpha(4))}^{(4)} d_{j(5)j(\alpha(5))}^{(5)} d_{j(6)j(\alpha(6))}^{(6)} \\
&= \sum_{j(1), \dots, j(6)=1}^N d_{j(1)j(3)}^{(1)} d_{j(2)j(2)}^{(2)} d_{j(3)j(1)}^{(3)} d_{j(4)j(6)}^{(4)} d_{j(5)j(5)}^{(5)} d_{j(6)j(4)}^{(6)} \\
&= \sum_{j(1), \dots, j(6)=1}^N d_{j(1)j(3)}^{(1)} d_{j(3)j(1)}^{(3)} \cdot d_{j(4)j(6)}^{(4)} d_{j(6)j(4)}^{(6)} \cdot d_{j(2)j(2)}^{(2)} \cdot d_{j(5)j(5)}^{(5)} \\
&= \text{Tr}[D^{q(1)} D^{q(3)}] \cdot \text{Tr}[D^{q(4)} D^{q(6)}] \cdot \text{Tr}[D^{q(2)}] \cdot \text{Tr}[D^{q(5)}] \\
&= N^4 \cdot \text{tr}[D^{q(1)} D^{q(3)}] \cdot \text{tr}[D^{q(4)} D^{q(6)}] \cdot \text{tr}[D^{q(2)}] \cdot \text{tr}[D^{q(5)}].
\end{aligned}$$

Vemos que la última expresión es un producto de trazas a lo largo de los ciclos α . Así que, denotaremos por tr_α a este producto.

Anteriormente se introdujo la notación φ_π para las particiones que no se cruzan. Por lo que es útil definir φ_α en el caso de que α sea una permutación.

Notación 2.55. Sea n un entero positivo fijo dado, para todo $1 \leq k \leq n$, sean los funcionales multilineales $\varphi_k : \mathcal{A}^k \rightarrow \mathbb{C}$ sobre un álgebra \mathcal{A} dada. Asumiendo que cada φ_k es tracial en sus k elementos en el sentido que

$$\varphi_k(A_1, \dots, A_k) = \varphi_k(A_k, A_1, \dots, A_{k-1}),$$

para todo $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A}$. Entonces definimos para $\alpha \in S_n$ la expresión $\varphi_\alpha[A_1, \dots, A_n]$ para $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ como un producto de acuerdo al ciclo de descomposición de α . Denotemos por c_1, \dots, c_r los ciclos de α , entonces tenemos que

$$\varphi_\alpha[A_1, \dots, A_n] := \varphi_{c_1}[A_1, \dots, A_n] \cdots \varphi_{c_r}[A_1, \dots, A_n],$$

en donde, para un ciclo $c = (i_1, i_2, \dots, i_p)$ definimos

$$\varphi_c[A_1, \dots, A_n] := \varphi_p(A_{i_1}, \dots, A_{i_p}).$$

Lema 2.56. Sean $D^{(1)} = (d_{ij}^{(1)})_{i,j=1}^N, \dots, D^{(m)} = (d_{ij}^{(m)})_{i,j=1}^N$ m matrices aleatorias de tamaño $N \times N$ y sea $\alpha \in S_m$ una permutación de m elementos. Entonces,

$$\sum_{j(1), \dots, j(m)=1}^N d_{j(1)j(\alpha(1))}^{(1)} \cdots d_{j(m)j(\alpha(m))}^{(m)} = N^{\#\alpha} \cdot \text{tr}_\alpha[D^1, \dots, D^{(m)}].$$

Por lo tanto, podemos escribir la conclusión de nuestro cálculo de la siguiente manera:

$$\varphi(AD^{q(1)}AD^{q(2)} \cdots AD^{q(m)}) = \sum_{\pi \in \mathcal{P}_2(m)} \text{tr}_{\pi\gamma}[D^{q(1)}, \dots, D^{q(m)}] \cdot N^{\#(\pi\gamma)-1-\frac{m}{2}}.$$

Podemos hacer lo mismo para varias matrices aleatorias gaussianas independientes, restringiendo la suma sobre π a emparejamientos que respetan el “color” de matrices.

Proposición 2.57. Sean $A^{(1)}, \dots, A^{(n)}$ n matrices aleatorias gaussianas autoadjuntas independientes de tamaño $N \times N$, y D una matriz constante de tamaño $N \times N$. Entonces tenemos para todo $m \in \mathbb{N}$, todo $q(1), \dots, q(m) \in \mathbb{N}$ y todo $1 \leq p(1), \dots, p(m) \leq n$ que

$$\varphi(A^{(p(1))}D^{q(1)} \cdots A^{(p(m))}D^{q(m)}) = \sum_{\pi \in \mathcal{P}_2^{(p)}(m)} \text{tr}_{\pi\gamma}[D^{q(1)}, \dots, D^{q(m)}] \cdot N^{\#(\pi\gamma)-1-\frac{m}{2}}.$$

Ahora veremos la estructura asintótica de esta fórmula. Por la suposición de que $D_N \xrightarrow{\text{distr}} d$ para algún $d \in (\mathcal{A}, \psi)$ la cantidad

$$\text{tr}_{\pi\gamma}[D^{q(1)}, \dots, D^{q(m)}],$$

tiene un límite, es decir

$$\psi_{\pi\gamma}[d^{q(1)}, \dots, d^{q(m)}],$$

dado que el factor $N^{\#(\pi\gamma)-1-\frac{m}{2}}$ suprime todas las particiones que se cruzan cuando $N \rightarrow \infty$, obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.58. *Sea, para cada $N \in \mathbb{N}$, $A_N^{(1)}, \dots, A_N^{(n)}$; n matrices aleatorias gaussianas autoadjuntas independientes de tamaño $N \times N$, y D_N una matriz constante de tamaño $N \times N$ tal que $D_N \xrightarrow{\text{distr}} d$ para algún $d \in (\mathcal{A}, \psi)$. Entonces para todo $m \in \mathbb{N}$, para todo $q(1), \dots, q(m) \in \mathbb{N}$ y todo $1 \leq p(1), \dots, p(m \leq n)$ que*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \varphi(A^{(p(1))} D^{q(1)} \dots A^{(p(m))} D^{q(m)}) = \sum_{\pi \in NC_2^{(p)}(m)} \psi_{\pi\gamma}[d^{q(1)}, \dots, d^{q(m)}], \quad (2.5)$$

en donde $NC_2^{(p)}(m)$ denota todos los pares de $\mathcal{P}_2^{(p)}(m)$ que no se cruzan.

Es similar a la fórmula de momentos alternos de dos familias libres de variables aleatorias, considerando que una de ellas es un sistema semicircular. Recordando que si $d_1, \dots, d_n, s_1, \dots, s_n$ son elementos en algún espacio de probabilidad no conmutativo (\mathcal{B}, ϕ) . Tales que s_1, \dots, s_n son un sistema semicircular, es decir, que cada s_i es un elemento semicircular estándar y s_1, \dots, s_n son libres, y tales que $\{s_1, \dots, s_n\}$ y $\{d_1, \dots, d_n\}$ son libres, entonces para momentos alternados (ver ecuación(2.3))

$$\begin{aligned} \phi(s_{p(1)} d_1 \dots s_{p(m)} d_m) &= \sum_{\pi \in NC(m)} \kappa_{\pi}[s_{p(1)}, \dots, s_{p(m)}] \cdot \phi_{K(\pi)}[d_1, \dots, d_m] \\ &= \sum_{\pi \in NC_2^{(p)}(m)} \phi_{K(\pi)}[d_1, \dots, d_m]. \end{aligned}$$

Esto coincide con la fórmula (2.5), la única diferencia es que tenemos $K(\pi)$ en lugar de $\pi\gamma$. Sin embargo, para un emparejamiento que no se cruza es lo mismo, debido a que el complemento de una partición que no se cruza es $\pi^{-1}\gamma$ pero π y π^{-1} coinciden, en consecuencia $\pi\gamma$ es el complemento de π . Nos bastará con verificarlo con el siguiente ejemplo.

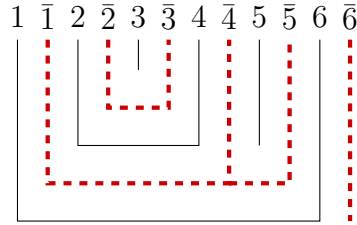
Ejemplo 2.59. Consideremos la partición que no se cruza

$$\pi = \{\{1, 6\}, \{2, 4\}, \{3\}, \{5\}\}.$$

Entonces, tenemos que

$$\pi\gamma = (1, 4, 5)(2, 3)(6).$$

Que concuerda con el complemento $K(\pi)$, que puede verse gráficamente



Para concluir, generalizaremos en el siguiente teorema considerando varias sucesiones de matrices aleatorias. Los cálculos son similares si reemplazamos las potencias de D por productos de matrices constantes.

Teorema 2.60. Para todos p, q enteros. Sean, para cada $N \in \mathbb{N}$, $A_N^{(1)}, \dots, A_N^{(p)}$ matrices aleatorias gaussianas independientes y sean $D_N^{(1)}, \dots, D_N^{(q)}$ matrices constantes tales que convergen en distribución para $N \rightarrow \infty$, es decir,

$$D_N^{(1)}, \dots, D_N^{(q)} \xrightarrow{\text{distr}} d_1, \dots, d_q,$$

para algunos $d_1, \dots, d_q \in (\mathcal{A}, \psi)$. Entonces

$$A_N^{(1)}, \dots, A_N^{(p)}, D_N^{(1)}, \dots, D_N^{(q)} \xrightarrow{\text{distr}} s_1, \dots, s_p, d_1, \dots, d_q,$$

en donde cada s_i es un elemento semicircular estándar y $s_1, \dots, s_p, \{d_1, \dots, d_q\}$ son libres. En particular, las matrices aleatorias gaussianas y las matrices constantes son asintóticamente libres.

El Teorema 2.60 se puede ilustrar con la Figura 2.1, donde se tiene la suma libre de una variable aleatoria semicircular con una Bernoulli en $[-1, 1]$ utilizando el método de subordinación comparada con la suma de una matriz con entradas gaussianas independientes con una determinista diagonal donde la mitad son eigenvalores 1 y la otra mitad -1 .

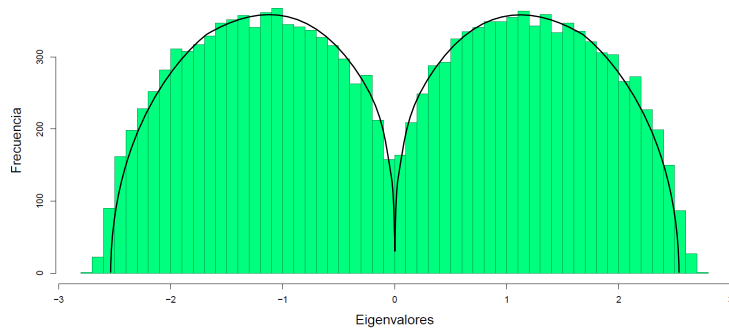


Figura 2.1: Comparación de suma de matrices con una suma libre.
Fuente: Elaboración propia.

Capítulo 3

Matrices de Markov

Las matrices de Markov aparecen por primera vez en [2] debido a que no se sabía nada sobre la existencia del límite de la distribución espectral; pero lo que sí se sabía era que se consideraba como una matriz de distribución limitante de la forma $\sqrt{n}(A_n - A)$ utilizada para la derivada de una matriz de transición en un proceso de Markov.

En este capítulo hacemos un estudio sobre Matrices de Markov análogo al de los capítulos anteriores. Antes de presentar el resultado definamos lo que es una matriz de Markov.

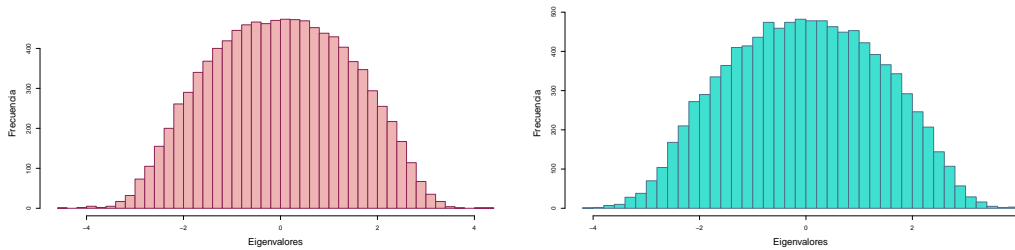
Definición 3.1. Sea $\{X_{ij} : j \geq i \geq 1\}$ un arreglo triangular superior infinito de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas y definamos $X_{ij} = X_{ji}$ para $j > i \geq 1$. Diremos que \mathbf{M}_n es una **matriz de Markov** si es simétrica y está dada por

$$\mathbf{M}_n = \mathbf{X}_n - \mathbf{D}_n,$$

en donde $\mathbf{X}_n = [X_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n}$ y $\mathbf{D}_n = \text{diag}(\sum_{j=1}^n X_{ij})_{1 \leq i \leq n}$ es una matriz diagonal, así cada renglón de \mathbf{M}_n suma cero, esto es

$$\begin{bmatrix} -\sum_{j=2}^n X_{1j} & X_{12} & X_{13} & \cdots & X_{1n} \\ X_{21} & -\sum_{j \neq 2}^n X_{2j} & X_{23} & \cdots & X_{2n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ X_{k1} & X_{k2} & \cdots & -\sum_{j \neq k}^n X_{kj} & \cdots & X_{kn} \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ X_{n1} & X_{n2} & \cdots & & & -\sum_{j=1}^{n-1} X_{nj} \end{bmatrix}.$$

En el ejemplo de la Figura 3.1 se muestran: (a) La simulación de la suma de la matriz \mathbf{X}_n con una matriz independiente diagonal \mathbf{D}_n y (b) Una simulación del comportamiento de los eigenvalores de matrices de Markov, en donde claramente se ve un comportamiento similar, considerando que cada una de las matrices es de tamaño 100×100 con 100 realizaciones para cada simulación.



(a) suma de una matriz \mathbf{X}_n independiente de una matriz diagonal \mathbf{D}_n .

(b) Matriz de Markov.

Figura 3.1: Comparación de Matrices.

Fuente: Elaboración propia.

Debido al comportamiento tan similar entre ambos casos, nos interesa estudiar una alternativa para una matriz de Markov comparándola con suma de matrices que son independientes entre sí.

Sea $X = (x_{ij})_{i,j=1}^N$ una matriz en $GOE(N)$ y sea $D = \text{diag}(\sum_{j=1}^N x_{ij})_{1 \leq i \leq N}$ una matriz diagonal, queremos calcular sus momentos mixtos dados por

$\mathbb{E}(\text{tr}(X_1^{n_1} D^{m_1} \dots X_k^{n_k} D^{m_k}))$ con $n_1, \dots, n_k, m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$. Calcularemos en primer lugar $\mathbb{E}(\text{tr}(X^2 D^2))$ para después tratar de generalizar.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\text{tr}(X^2 D^2)) &= \frac{1}{N} \sum_{i=(i_1, i_2)} \mathbb{E}(x_{i_1 i_2} x_{i_2 i_1} d_{i_1 i_1} d_{i_1 i_1}) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=(i_1, i_2)} \mathbb{E}(x_{i_1 i_2} x_{i_2 i_1} \sum_{j=(j_1, j_2)} x_{i_1 j_1} x_{i_1 j_2}) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i, j} \mathbb{E}(x_{i_1 i_2} x_{i_2 i_1} x_{i_1 j_1} x_{i_1 j_2}). \end{aligned}$$

La última igualdad se puede separar de acuerdo a qué índices son iguales y cuales no. Para evitar una notación pesada sólo indicaremos en el subíndice de las sumas qué índices coinciden, obviando los que no. De esta forma, podemos escribir la suma anterior como

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\text{tr}(X^2 D^2)) &= \frac{1}{N} \sum_{j_1=j_2} \mathbb{E}(x_{i_1 i_2} x_{i_2 i_1} x_{i_1 j_1} x_{i_1 j_1}) + \frac{1}{N} \sum_{i_1=i_2} \mathbb{E}(x_{i_1 i_1} x_{i_1 i_1} x_{i_1 j_1} x_{i_1 j_2}) \\ &+ \frac{1}{N} \sum_{i_2=j_1} \mathbb{E}(x_{i_1 i_2} x_{i_2 i_1} x_{i_1 i_2} x_{i_1 j_2}) + \frac{1}{N} \sum_{i_1=j_1} \mathbb{E}(x_{i_1 i_2} x_{i_2 i_1} x_{i_1 i_1} x_{i_1 j_2}) + \dots, \end{aligned}$$

en donde los puntos indican considerar todas las formas de identificar subíndices. Dada una identificación de índices \mathbf{i}, \mathbf{j} podemos asociar un grafo que se muestra en la Figura 3.2, realizando un procedimiento similar para la demostración del Teorema de Wigner. Recordemos que para las matrices de Wigner iniciábamos con un grafo cíclico debido a que sólo se consideraba un multi-índice. En este caso, el grafo inicial tiene una estructura diferente a consecuencia de que consideramos dos multi-índices.

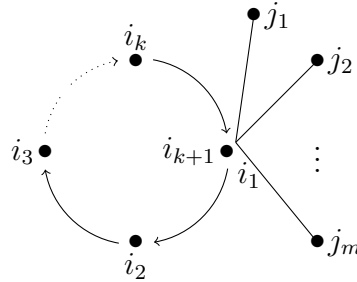


Figura 3.2: Grafo del comportamiento de dos multi- índices.
 Fuente: Elaboración propia.

Notemos que, como en el caso del Teorema de Wigner, tener una arista aislada implica que $E(x_{i_1 i_2} x_{i_2 i_1} x_{i_1 j_1} x_{i_1 j_2}) = 0$ y por otra parte el número de formas de escoger el índice está dado por N , $N(N - 1)$, $N(N - 1)(N - 2)$ ó $N(N - 1)(N - 2)(N - 3)$ de acuerdo al número de vértices de la gráfica identificada 1, 2, 3 ó 4, respectivamente.

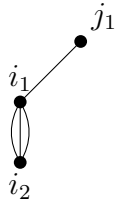
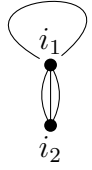
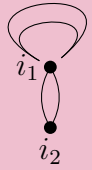
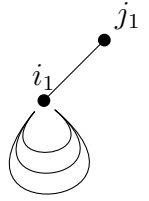
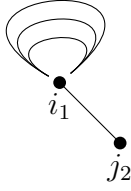
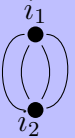
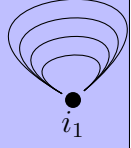
En el Cuadro 3.1 se muestran todas las posibles identificaciones y sus respectivos grafos del momento mixto $\mathbb{E}(tr(X^2 D^2))$.

Restricciones	Grafo	Restricciones	Grafo
		$i_1 = i_2$	

(Continúa en la página siguiente)

Restricciones	Grafo	Restricciones	Grafo
$i_1 = i_2$ y $j_1 = j_2$		$i_1 = j_1$	
$i_1 = j_1$ y $i_2 = j_2$		$i_1 = j_2$	
$i_1 = j_2$ y $i_2 = j_1$		$i_2 = j_1$	
$j_1 = j_2$		$j_1 = j_2$ y $i_1 = i_2$	

(Continúa en la página siguiente)

Restricciones	Grafo	Restricciones	Grafo
$i_2 = j_2$		$i_2 = j_2$ y $i_1 = j_1$	
$i_1 = j_2 = j_1$		$i_1 = j_2 = i_2$	
$i_1 = j_1 = i_2$		$i_2 = j_1 = j_2$	
$i_1 = i_2 = j_1 = i_2$			

(Continúa en la página siguiente)

Restricciones	Grafo	Restricciones	Grafo
---------------	-------	---------------	-------

Cuadro 3.1: Grafos de los momentos mixtos $\mathbb{E}(tr(X^2 D^2))$.

Fuente: Elaboración propia.

Después de estudiar cada posible grafo, notemos que los únicos grafos que contribuyen son aquellos que están resaltados por un color rosado, debido a que representan la varianza de la variable, en términos de grafos que tenemos aristas dirigidas. En cambio, cuando tenemos aristas aisladas, el valor esperado será cero y en consecuencia no contribuye a la suma.

Así, cuando $N \rightarrow \infty$ se tiene que

$$\mathbb{E}(tr(X^2 D^2)) = \frac{N(N-1)(N-2)}{NN^2} + \frac{N(N-1)}{NN^2} + \frac{N}{NN^2} \rightarrow 1. \quad (3.1)$$

Del ejemplo anterior podemos hacer la observación de que los índices i 's no se unirán con los j 's siempre que haya un número par de índices en ambos casos.

A continuación se presenta un ejemplo de momentos mixtos con las características de que cada matriz será elevada a una potencia par además de ver su comportamiento con la ayuda del Lema 1.12.

Consideremos el momento mixto $\mathbb{E}(tr(X^6 D^2))$ para X una matriz en $M_n(\mathbb{R})$ y D una matriz diagonal en $M_n(\mathbb{R})$. Queremos ver que X es independiente de D , a partir del comportamiento de los multi-índices del grafo que se construye a partir de los subíndices de cada variable.

$$\mathbb{E}(tr(X^6 D^2)) = \sum \mathbb{E}(x_{i_1 i_2} x_{i_2 i_3} x_{i_3 i_4} x_{i_4 i_5} x_{i_5 i_6} x_{i_6 i_1} x_{i_1 j_1} x_{i_1 j_2}).$$

En la Figura 3.3 se muestra el grafo del momento mixto anterior.

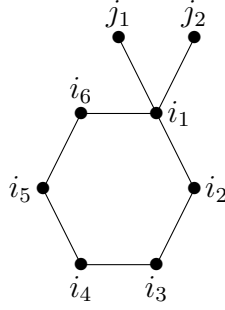


Figura 3.3: Grafo inicial del momento mixto $\mathbb{E}(tr(X^6 D^2))$.
Fuente: Elaboración propia.

Para este ejemplo, todas las formas posibles de índices de i para obtener un árbol se presentan enseguida considerando siempre que $j_1 = j_2$.

$$\left\{ \begin{array}{ll} i_4 = i_6, & i_5 = i_1 \\ i_5 = i_1, & i_4 = i_2 \\ i_5 = i_3, & i_6 = i_2 \\ i_1 = i_3 = i_5 \\ i_6 = i_2 = i_4. \end{array} \right.$$

Así, cualquier elección de igualdad que se elija obtendremos un árbol de la Figura 3.4.

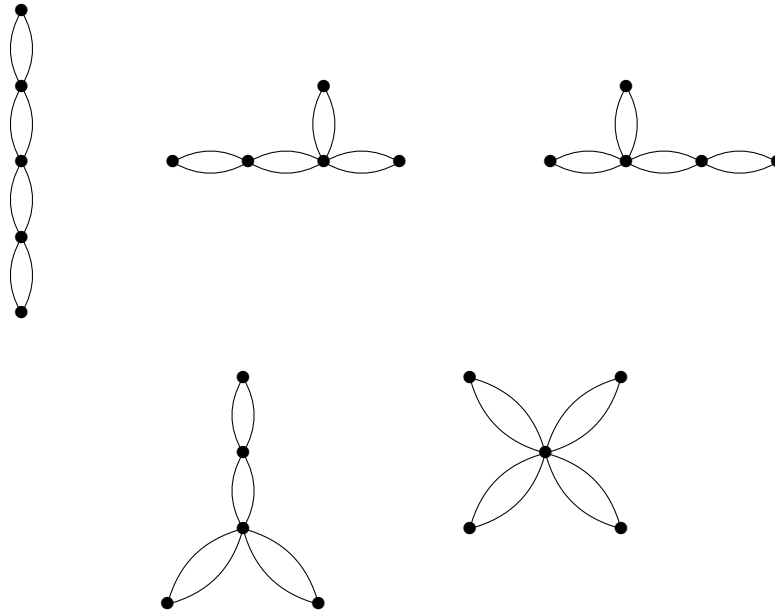


Figura 3.4: Árboles posibles.
Fuente: Elaboración propia.

Finalmente, para saber si la forma en que hemos reducido el grafo ha sido la mejor elección, aplicamos el Lema 1.12, considerando su esqueleto. Así, se tiene que

$$|\tilde{V}| - |\tilde{E}| = 5 - 4 = 1,$$

y se verifica como en la Figura 3.5.

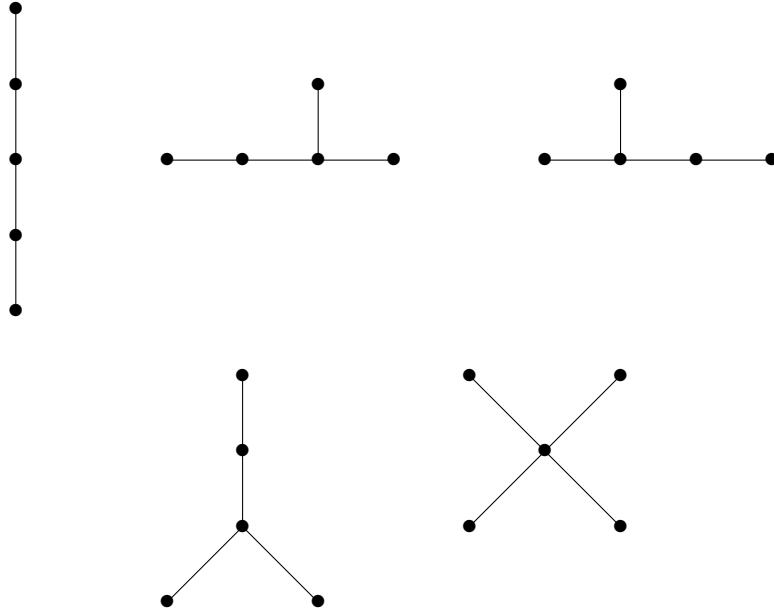


Figura 3.5: Esqueletos posibles.
Fuente: Elaboración propia.

Como se observó en el ejemplo, la transformación del ciclo de los índices de i no depende de los índices de j . A continuación enunciaremos y demostraremos algunos lemas que nos ayudarán a asegurar la independencia libre asintótica entre la matriz X y la matriz diagonal D .

Para formalizar esto introducimos la siguiente notación.

Notación 3.2. Sean $X = (x_{ij})_{i,j=1}^N$ matriz de Wigner de $N \times N$ definimos la matriz $D = \text{diag}(\sum_{j=1}^N x_{ij})_{1 \leq i \leq N}$, consideremos de aquí en adelante la notación siguiente

$$A := \sqrt{N}X \quad \text{con} \quad a_{ij} := \sqrt{N}x_{ij},$$

$$B := \text{diag}\left(\sum_{j=1}^N a_{ij}\right)_{1 \leq i \leq N},$$

$$M_{n,m} := \sup_{N \in \mathbb{N}} \max_{1 \leq i \leq j \leq N} \mathbb{E} |\sqrt{N}x_{ij}|^{n+m} < \infty. \quad (3.2)$$

$$\mathbf{i} := (i_1, \dots, i_k) \in \{1, 2, \dots, N\}^k, \text{ con } i_{k+1} = i_1 \quad (3.3)$$

$$\mathbf{j} := (j_1, \dots, j_l) \in \{1, 2, \dots, N\}^l. \quad (3.4)$$

$$\mathbf{Q}(\mathbf{i}, \mathbf{j}) := \mathbb{E}[a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \cdots a_{i_k i_1} a_{i_1 j_1} a_{i_1 j_2} \cdots a_{i_1 j_l}].$$

Además, sea $\tilde{X} = (\tilde{x}_{ij})_{i,j=1}^N$ matriz de Wigner de $N \times N$ definimos la matriz $\tilde{D} = \text{diag}(\sum_{j=1}^N \tilde{x}_{ij})_{1 \leq i \leq N}$ consideremos lo siguiente

$$\tilde{A} := \sqrt{N} \tilde{X} \quad \text{con} \quad \tilde{a}_{ij} := \sqrt{N} \tilde{x}_{ij},$$

$$\tilde{B} := \text{diag}\left(\sum_{j=1}^N \tilde{a}_{ij}\right)_{1 \leq i \leq N},$$

$$\tilde{M}_{n,m} := \sup_{N \in \mathbb{N}} \left\{ \max_{1 \leq i \leq j \leq N} \mathbb{E} |\sqrt{N} x_{ij}|^{n+m}, \max_{1 \leq i \leq j \leq N} \mathbb{E} |\sqrt{N} \tilde{x}_{ij}|^{n+m} \right\} < \infty. \quad (3.5)$$

Seguendo la notación de (3.3) y (3.4), se define

$$\tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{i}, \mathbf{j}) := \mathbb{E}[a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \cdots a_{i_k i_1} \tilde{a}_{i_1 j_1} \tilde{a}_{i_1 j_2} \cdots \tilde{a}_{i_1 j_l}].$$

Como en el caso del Teorema de Wigner no podemos tener aristas aisladas.

Lema 3.3. Si $E(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ tiene una arista aislada, entonces $\mathbf{Q}(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = 0$.

Demostración. Como $A = (a_{ij})_{i,j=1}^N$ es una matriz de Wigner es claro que $\mathbb{E}[a_{kl}] = 0$ para cada k, l además b_{kl} y b_{st} son independientes cuando $(k, l) \neq (s, t)$ ó $(s, t) \neq (k, l)$. Luego si (i_l, i_{l+1}) es una arista aislada de $E(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\mathbf{i}, \mathbf{j}) &= \mathbb{E}[a_{i_1 i_2} \cdots a_{i_{l-1} i_l} a_{i_l i_{l+1}} a_{i_{l+1} i_{l+2}} \cdots a_{i_k i_1} a_{i_1 j_1} a_{i_1 j_2} \cdots a_{i_1 j_l}] \\ &= \mathbb{E}[a_{i_l i_{l+1}}] \mathbb{E}[a_{i_1 i_2} \cdots a_{i_{l-1} i_l} a_{i_{l+1} i_{l+2}} \cdots a_{i_k i_1} a_{i_1 j_1} a_{i_1 j_2} \cdots a_{i_1 j_l}] = 0. \end{aligned}$$

Similarmente, si (i_1, j_m) es una arista aislada de $E(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\mathbf{i}, \mathbf{j}) &= \mathbb{E}[a_{i_1 i_2} \cdots a_{i_k i_1} a_{i_1 j_1} \cdots a_{i_1 j_{m-1}} a_{i_1 j_m} a_{i_1 j_{m+1}} \cdots a_{i_1 j_l}] \\ &= \mathbb{E}[a_{i_1 j_m}] \mathbb{E}[a_{i_1 i_2} \cdots a_{i_k i_1} a_{i_1 j_1} \cdots a_{i_1 j_{m-1}} a_{i_1 j_{m+1}} \cdots a_{i_1 j_l}] = 0. \end{aligned}$$

□

Lema 3.4. Si $|\tilde{V}(\mathbf{i}, \mathbf{j})| \geq \lfloor \frac{n+m}{2} \rfloor + 2$, entonces $E(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ tiene al menos una arista aislada.

Demostración. Por el Lema 1.12 $|\tilde{V}(\mathbf{i}, \mathbf{j})| \leq |\tilde{E}(\mathbf{i}, \mathbf{j})| + 1$, luego

$$\lfloor \frac{n+m}{2} \rfloor + 2 \leq |\tilde{E}(\mathbf{i}, \mathbf{j})| + 1 \implies \lfloor \frac{n+m}{2} \rfloor + 1 \leq |\tilde{E}(\mathbf{i}, \mathbf{j})|.$$

De la última desigualdad se tiene que $E(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ tendría por lo menos $2(\lfloor \frac{n+m}{2} \rfloor + 1)$ aristas dirigidas, esto es $(n+m) + 2$ o $(n+m) + 1$ si $n+m$ es par o impar respectivamente, pero en ambos casos es imposible pues $|E(\mathbf{i}, \mathbf{j})| = n+m$. Por lo tanto $E(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ debe tener una arista aislada. \square

Teorema 3.5. Para todo n, m enteros. Sean X, \tilde{X} matrices de Wigner de tamaño $N \times N$ independientes y sean $D = \sum_{j=1}^N x_{ij}$ una matriz diagonal que depende de X y $\tilde{D} = \sum_{j=1}^N \tilde{x}_{ij}$ una matriz diagonal dependiente de \tilde{X} , entonces

$$\mathbb{E}(\text{tr}(X^n D^m)) - \mathbb{E}(\text{tr}(X^n \tilde{D}^m)) \rightarrow 0$$

cuando $N \rightarrow \infty$.

Demostración. El momento mixto de X^n y D^m es

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}(\text{tr}(X^n D^m))| &= |\mathbb{E}(\text{tr}((N^{-\frac{1}{2}}A)^n (N^{-\frac{3}{2}}B)^m))| \\ &\leq \frac{1}{N^{\frac{n+3m}{2}+1}} \sum_{|\tilde{V}|=n+m} |\mathcal{Q}(\mathbf{i}, \mathbf{j})| \\ &= \frac{1}{N^{\frac{n+3m}{2}+1}} \sum_{|\tilde{V}| \leq \lfloor \frac{n+m}{2} \rfloor + 1} |\mathcal{Q}(\mathbf{i}, \mathbf{j})| + \\ &\quad + \frac{1}{N^{\frac{n+3m}{2}+1}} \sum_{|\tilde{V}| \geq \lfloor \frac{n+m}{2} \rfloor + 2} |\mathcal{Q}(\mathbf{i}, \mathbf{j})|. \end{aligned}$$

Por los Lemas 3.3 y 3.4 el segundo sumando es igual a cero. En consecuencia la expresión del momento mixto se reduce a

$$|\mathbb{E}(\text{tr}(X^n D^m))| \leq \frac{1}{N^{\frac{n+3m}{2}+1}} \sum_{|\tilde{V}| \leq \lfloor \frac{n+m}{2} \rfloor + 1} |\mathcal{Q}(\mathbf{i}, \mathbf{j})|. \quad (3.6)$$

Por otro lado, acotamos $\mathbf{Q}(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ por la desigualdad de Hölder y (3.2) obtenemos que

$$\begin{aligned} |\mathbf{Q}(\mathbf{i}, \mathbf{j})| &= |\mathbb{E}[a_{i_1 i_2} \cdots a_{i_k i_1} a_{i_1 j_1} \cdots a_{i_1 j_l}]| \\ &\leq [\mathbb{E}|a_{i_1 i_2}|^{n+m}]^{\frac{1}{n+m}} \cdots [\mathbb{E}|a_{i_1 j_m}|^{n+m}]^{\frac{1}{n+m}} \\ &\leq M_{n,m}^{\frac{1}{n+m}} \cdots M_{n,m}^{\frac{1}{n+m}} = M_{n,m}. \end{aligned}$$

Si $n + m$ es impar, es decir, uno es par y el otro impar, entonces (3.6) se reduce a

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}(\text{tr}(X^n D^m))| &\leq \frac{1}{N^{\frac{n+3m}{2}+1}} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l=1 \\ k+l=\lceil \frac{n+m}{2} \rceil+1}}^N |\mathbf{Q}(\mathbf{i}, \mathbf{j})| \\ &\leq \frac{1}{N^{\frac{n+3m}{2}+1}} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l=1 \\ k+l=\lceil \frac{n+m}{2} \rceil+1}}^N M \\ &= \frac{N^{\frac{n+m}{2}+1}}{N^{\frac{n+3m}{2}+1}} M_{n,m} = \frac{1}{N^m} M_{n,m} \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Cuando $N \rightarrow \infty$.

Si $n + m$ es par, consideramos dos casos, el primero donde son impares y el segundo donde son pares. Si n y m son impares consideremos el subgrafo $G' = (V', E')$ con $V' = \{i_1, \dots, i_n\}$ y $E' = \{(i_l, i_l + 1) : i_l \in V'\}$, luego por ser n impar, E' tiene una arista aislada, en consecuencia no se puede reducir a un árbol. Similarmente ocurre si tenemos el subgrafo $G'' = (V'', E'')$ con $V'' = \{i_1, j_1, \dots, j_m\}$ y $E'' = \{(i_1, j_l) : l \in \{1, \dots, m\}\}$ por ser m impar. Se sigue del Lema 3.3 que $\mathbb{E}(\text{tr}(X^n D^m)) = 0$.

Si n y m son pares, partiendo de (3.6) tenemos

$$|\mathbb{E}(\text{tr}(X^n D^m))| \leq \frac{1}{N^{\frac{n+3m}{2}+1}} \sum_{|\tilde{V}| \leq \frac{n+m}{2}} |\mathbf{Q}(\mathbf{i}, \mathbf{j})| + \frac{1}{N^{\frac{n+3m}{2}+1}} \sum_{|\tilde{V}| = \frac{n+m}{2}+1} |\mathbf{Q}(\mathbf{i}, \mathbf{j})|, \quad (3.7)$$

como ya tenemos una cota para $\mathbf{Q}(\mathbf{i}, \mathbf{j})$, el primer sumando converge a cero

cuando $N \rightarrow \infty$, esto es

$$\begin{aligned} \frac{1}{N^{\frac{n+3m}{2}+1}} \sum_{|\tilde{V}| \leq \frac{n+m}{2}} |\mathcal{Q}(\mathbf{i}, \mathbf{j})| &\leq \frac{1}{N^{\frac{n+3m}{2}+1}} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l=1 \\ k+l = \frac{n+m}{2}}}^N M_{n,m} \\ &\leq \frac{N^{\frac{n+m}{2}}}{N^{\frac{n+3m}{2}+1}} M_{n,m} \\ &= \frac{M_{n,m}}{N^{m+1}} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Así, (3.7) se reduce a

$$|\mathbb{E}(\text{tr}(X^n D^m))| \leq \frac{1}{N^{\frac{n+3m}{2}+1}} \sum_{|\tilde{V}| = \frac{n+m}{2}+1} |\mathcal{Q}(\mathbf{i}, \mathbf{j})|. \quad (3.8)$$

Por otro lado, estudiemos el comportamiento del momento mixto de X^n y \tilde{D}^m .

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}(\text{tr}(X^n \tilde{D}^m))| &= |\mathbb{E}(\text{tr}[(N^{-\frac{1}{2}}A)^n (N^{-\frac{3}{2}}\tilde{B})^m])| \\ &\leq \frac{1}{N^{\frac{n+3m}{2}+1}} \sum_{|\tilde{V}| = [n+m]} |\mathbb{E}(a_{i_1 i_2} \cdots a_{i_n i_1} \tilde{a}_{i_1 j_1} \cdots \tilde{a}_{i_1 j_m})| \\ &= \frac{1}{N^{\frac{n+3m}{2}+1}} \sum_{|\tilde{V}| = [n+m]} |\tilde{\mathcal{Q}}(\mathbf{i}, \mathbf{j})| \\ &= \frac{1}{N^{\frac{n+3m}{2}+1}} \sum_{1 \leq |\tilde{V}| \leq [\frac{n+m}{2}]+1} |\tilde{\mathcal{Q}}(\mathbf{i}, \mathbf{j})| + \\ &\quad + \frac{1}{N^{\frac{n+3m}{2}+1}} \sum_{|\tilde{V}| \geq [\frac{n+m}{2}]+2} |\tilde{\mathcal{Q}}(\mathbf{i}, \mathbf{j})|. \end{aligned}$$

A consecuencia de los Lemas 3.3 y 3.4 el segundo sumando es igual a cero. Así, la expresión del momento mixto se reduce a

$$|\mathbb{E}(\text{tr}(X^n \tilde{D}^m))| \leq \frac{1}{N^{\frac{n+3m}{2}+1}} \sum_{1 \leq |\tilde{V}| \leq [\frac{n+m}{2}]+1} |\tilde{\mathcal{Q}}(\mathbf{i}, \mathbf{j})|. \quad (3.9)$$

A continuación, realizaremos un análisis análogo al momento mixto $\mathbb{E}(\text{tr}(X^n D^m))$. Usando nuevamente la desigualdad de Hölder y (3.5), acotemos $\tilde{\mathcal{Q}}(\mathbf{i}, \mathbf{j})$, esto es,

$$\begin{aligned}
|\tilde{Q}(\mathbf{i}, \mathbf{j})| &= |\mathbb{E}(\text{tr}(X^n \tilde{D}^m))| \\
&= |\mathbb{E}(a_{i_1 i_2} \cdots a_{i_n i_1} \tilde{a}_{i_1 j_1} \cdots \tilde{a}_{i_1 j_m})| \\
&\leq [\mathbb{E}|a_{i_1 i_2}|^{n+m}]^{\frac{1}{n+m}} \cdots [\mathbb{E}|a_{i_1 j_m}|^{n+m}]^{\frac{1}{n+m}} \\
&\leq \tilde{M}_{n,m}^{\frac{1}{n+m}} \cdots \tilde{M}_{n,m}^{\frac{1}{n+m}} = \tilde{M}_{n,m}. \tag{3.10}
\end{aligned}$$

De manera que si $n+m$ es impar, es decir uno de ellos es par y el otro impar, el momento mixto $\mathbb{E}(\text{tr}(X^n \tilde{D}^m))$ se puede acotar por $\tilde{M}_{n,m}$, por lo que se tendría que

$$\begin{aligned}
|\mathbb{E}(\text{tr}(X^n \tilde{D}^m))| &\leq \frac{1}{N^{\frac{n+3m}{2}+1}} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l=1 \\ k+l=\lceil \frac{n+m}{2} \rceil + 1}}^N |\mathbf{Q}(\mathbf{i}, \mathbf{j})| \\
&\leq \frac{1}{N^{\frac{n+3m}{2}+1}} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l=1 \\ k+l=\lceil \frac{n+m}{2} \rceil + 1}}^N M \\
&= \frac{N^{\frac{n+m}{2}+1}}{N^{\frac{n+3m}{2}+1}} \tilde{M}_{n,m} = \frac{1}{N^m} \tilde{M}_{n,m} \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

cuando $N \longrightarrow 0$. Luego, si $n+m$ es par pero n y m son impares se concluye que $\mathbb{E}(\text{tr}(X^n \tilde{D}^m)) \longrightarrow 0$ haciendo un análisis semejante al que se hizo para $\mathbb{E}(\text{tr}(X^n \tilde{D}^m))$. Finalmente, considerando el caso cuando n y m son pares, y separando (3.9) en dos sumas tenemos

$$|\mathbb{E}(\text{tr}(X^n \tilde{D}^m))| \leq \frac{1}{N^{\frac{n+3m}{2}+1}} \sum_{1 \leq |\tilde{V}| \leq \frac{n+m}{2}} |\tilde{Q}(\mathbf{i}, \mathbf{j})| + \frac{1}{N^{\frac{n+3m}{2}+1}} \sum_{|\tilde{V}| = \frac{n+m}{2} + 1} |\tilde{Q}(\mathbf{i}, \mathbf{j})|.$$

Acotando nuevamente el primer sumando, se tiene que tiende a cero, reduciéndose el momento mixto a

$$|\mathbb{E}(\text{tr}(X^n \tilde{D}^m))| \leq \frac{1}{N^{\frac{n+3m}{2}+1}} \sum_{|\tilde{V}| = \frac{n+m}{2} + 1} |\tilde{Q}(\mathbf{i}, \mathbf{j})|. \tag{3.11}$$

Debido a que ya se ha estudiado el comportamiento de los momentos mixtos por separado, es momento de concluir su diferencia, entonces si $n+m$ es impar o $n+m$ es par pero ambos impares

$$\mathbb{E}(\text{tr}(X^n D^m)) - \mathbb{E}(\text{tr}(X^n \tilde{D}^m)) \longrightarrow 0,$$

a consecuencia que tienden a cero por separado. Luego, si $n + m$ es par y n, m son pares por (3.8) y (3.11) tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\text{tr}(X^n D^m)) - \mathbb{E}(\text{tr}(X^n \tilde{D}^m)) &\leq \frac{1}{N^{\frac{n+3m}{2}+1}} \sum_{|\tilde{V}|=\frac{n+m}{2}+1} |\mathcal{Q}(\mathbf{i}, \mathbf{j})| - \\ &\quad - \frac{1}{N^{\frac{n+3m}{2}+1}} \sum_{|\tilde{V}|=\frac{n+m}{2}+1} |\tilde{\mathcal{Q}}(\mathbf{i}, \mathbf{j})| \\ &= \frac{1}{N^{\frac{n+3m}{2}+1}} \left[\sum_{|\tilde{V}|=\frac{n+m}{2}+1} (|\mathcal{Q}(\mathbf{i}, \mathbf{j})| - |\tilde{\mathcal{Q}}(\mathbf{i}, \mathbf{j})|) \right]. \end{aligned}$$

Observemos que, $\mathcal{Q}(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ y $\tilde{\mathcal{Q}}(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ tienen la misma estructura de árboles, lo que implica que $|\mathcal{Q}(\mathbf{i}, \mathbf{j})| - |\tilde{\mathcal{Q}}(\mathbf{i}, \mathbf{j})| \rightarrow 0$. \square

Se puede generalizar el Teorema 3.5, como se enuncia a continuación.

Teorema 3.6. *Para todo $n_1, \dots, n_p, m_1, \dots, m_q$ enteros. Sean X, \tilde{X} matrices de Wigner de $N \times N$ independientes y sean $D = \sum_{j=1}^N x_{ij}$ una matriz diagonal que depende de X y $\tilde{D} = \sum_{j=1}^N \tilde{x}_{ij}$ una matriz diagonal dependiente de \tilde{X} , entonces*

$$\mathbb{E}(\text{tr}(X^{n_1} D^{m_1} X^{n_2} D^{m_2} \dots X^{n_p} D^{m_q})) - \mathbb{E}(\text{tr}(X^{n_1} \tilde{D}^{m_1} X^{n_2} \tilde{D}^{m_2} \dots X^{n_p} \tilde{D}^{m_q})) \rightarrow 0, \text{ cuando } N \rightarrow \infty.$$

No demostraremos el Teorema 3.6, porque es suficiente ver el comportamiento de los subíndices, como se muestra en el grafo de la Figura 3.6, en donde se puede observar que es parecido a la Figura 3.3 siempre que $n_1, \dots, n_p, m_1, \dots, m_q$ sean pares como se presentó en la demostración del Teorema 3.5. Denotemos por $\varphi = \mathbb{E} \otimes \text{tr}$ y $*$ = $(X^{n_1} D^{m_1} \dots X^{n_p} D^{m_q})$ entonces

$$\begin{aligned} \varphi(*) &= \sum \mathbb{E}(x_{i_1 i_2} \dots x_{i_{n_1} i_1} d_{i_1 i_1} \dots d_{i_1 i_1} \dots x_{i_{n_1+m_1+\dots+n_p} i_{n_1+m_1+\dots+n_p+1}} \dots \\ &\quad \dots d_{i_{n_1+m_1+\dots+n_p+1} i_{n_1+m_1+\dots+n_p+1}} \dots d_{i_{n_1+m_1+\dots+n_p+1} i_{n_1+m_1+\dots+n_p+1}}) \\ &= \sum \mathbb{E}(x_{i_1 i_2} \dots x_{i_{n_1} i_1} x_{i_1 j_1} \dots x_{i_1 j_{m_1}} \dots x_{i_{n_1+m_1+\dots+n_p} i_{n_1+m_1+\dots+n_p+1}} \dots \\ &\quad \dots x_{i_{n_1+m_1+\dots+n_p+1} t_1} \dots x_{i_{n_1+m_1+\dots+n_p+1} t_{m_q}}) \end{aligned}$$

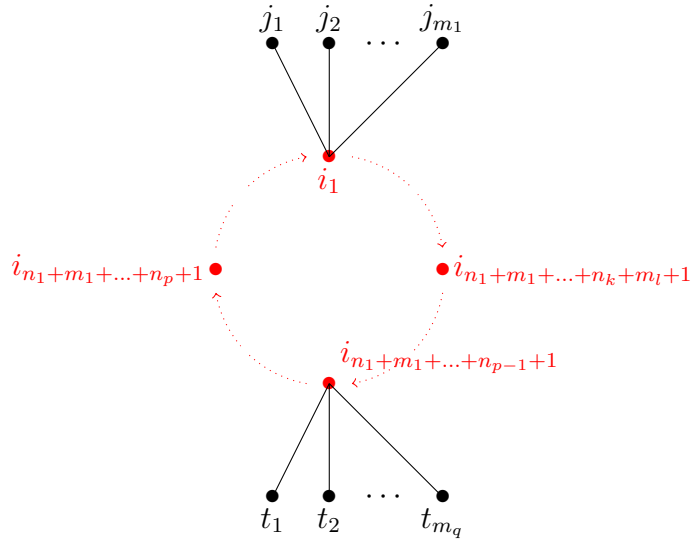


Figura 3.6: Comportamiento de los índices de $\mathbb{E}(\text{tr}(X^{n_1} D^{m_1} X^{n_2} D^{m_2} \dots X^{n_p} D^{m_q}))$.

Fuente: Elaboración propia.

Así, como en el ejemplo de la Figura 3.3, se puede reducir el grafo de la Figura 3.6 a un árbol semejante a los que se presentan en la Figura 3.4. Lo mismo ocurrirá con su esqueleto, que será parecido a los de la Figura 3.5. Análogamente, tendremos lo mismo para

$$\mathbb{E}(\text{tr}(X^{n_1} \tilde{D}^{m_1} X^{n_2} \tilde{D}^{m_2} \dots X^{n_p} \tilde{D}^{m_q})),$$

con lo que se concluye que

$$\mathbb{E}(\text{tr}(X^{n_1} D^{m_1} X^{n_2} D^{m_2} \dots X^{n_p} D^{m_q})) - \mathbb{E}(\text{tr}(X^{n_1} \tilde{D}^{m_1} X^{n_2} \tilde{D}^{m_2} \dots X^{n_p} \tilde{D}^{m_q})) \longrightarrow 0.$$

De las consideraciones anteriores se concluye que la distribución conjunta de (X_N, D_N) y (X_N, \tilde{D}) es la misma cuando $N \rightarrow \infty$. Sin embargo, por el Teorema 2.60 X_N y \tilde{D}_N son asintóticamente libres y por lo tanto $X - \tilde{D}$ converge en distribución a la diferencia de dos variables aleatorias libres, X_∞ y D_∞ donde X es semicircular y D es gaussiana. Esto nos demuestra el teorema principal de Bryc y Dembo [4].

Teorema 3.7. Sea $\{X_{ij} : j \geq i \geq 1\}$ una colección de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas con $\mathbb{E}(X_{12}) = 0$ y $\text{Var}(X_{12}) = 1$.

Con probabilidad 1, $\hat{\mu}(M_n/\sqrt{n})$ converge débilmente cuando $n \rightarrow \infty$ a la convolución libre γ_M de las medidas del semicírculo y la normal estándar. Esta medida γ_M es una medida de probabilidad simétrica no aleatoria con densidad suave acotada, no depende de la distribución de X_{12} y tiene soporte no acotado.

Conclusión

Como hemos visto a lo largo de la tesis, utilizamos las herramientas necesarias para demostrar el objetivo planteado: estudiar la distribución asintótica de matrices Markovianas.

- Usando principalmente teoría de grafos se demostró de manera diferente a la que presentan Bryc y Dembo en [4] que la distribución asintótica de matrices Markovianas es la convolución libre de las medidas del semicírculo y la normal estándar.
- Al ser un trabajo más teórico que aplicado, se buscó la forma de que fuera más entendible para los futuros lectores, considerando que el área de Probabilidad no Conmutativa en México es muy pequeña, esperando que se fortalezca en los próximos años.
- Las Simulaciones presentadas a lo largo de la tesis fueron realizadas en R.
- La tesis reúne varias áreas de Matemáticas dentro de las que se incluyen Combinatoria, Probabilidad no Conmutativa, Análisis Funcional, Teoría de Grafos, Teoría de Matrices Aleatorias. Algunas tiene más impacto que otras pero todas tienen un aporte importante dentro de este trabajo.

Bibliografía

- [1] Robert B. Ash and Catherine A. Doléans-Dade. *Probability and measure theory*. Academic Press, 2 edition, 2000.
- [2] Z. D Bai. Methodologies in spectral analysis of large dimensional random matrices, a review. *Statist. Sinica* 9, 1999.
- [3] O. Bohigas, M. J. Giannoni, and C. Schmit. Characterization of chaotic quantum spectra and universality of level fluctuation laws. *Phys. Rev. Lett.*, 52, 1984.
- [4] W. Bryc, A. Dembo, and T. Jiang. Spectral measure of large random hankel, markov and toeplitz matrices. *The Annals of Probability*, 34:1–38, 2006.
- [5] E. Brézin, C. Itzykson, G. Parisi, and J. B. Zuber. Planar diagrams. *Commun. Math. Phys*, 59:35–51, 1978.
- [6] Percy Deift. Four lectures on random matrix theory. In *Asymptotic combinatorics with application to mathematical physics*, volume 77. Springer-Verlag, 2003.
- [7] David J. Griffiths. *Introduction to quantum mechanics*. Pearson Prentice Hall, 2 edition, 2005.
- [8] Ralph P. Grimaldi. *Discrete and combinatorial mathematics*. Pearson Education, Inc., 2004.
- [9] Alice Guionnet. Large deviations and stochastic calculus for large random matrices. *probability surveys*, 1:72–172, 2004.
- [10] Alice Guionnet. *Large random matrices: Lectures on macroscopic asymptotics*. Springer, 2008.

-
- [11] Fumio Hiai and Denes Petz. *The Semicircle Law, free random variables and entropy*. Mathematical Surveys and Monographs 77. American Mathematical Society, 2006.
- [12] Kenneth Hoffman. *Linear algebra*. Prentice-Hall, 2 edition, 1971.
- [13] Madan Lal Mehta. *Random matrices*. Elsevier, 2004.
- [14] James A. Mingo and Roland Speicher. *Free probability and random matrices*, volume 35. Fields Institute Monographs, 2017.
- [15] J. Armando Domínguez Molina and Alfonso Rocha Arteaga. El teorema de wigner para matrices aleatorias. *Comunicación del Cimat No. I-09-08/15-10-2009*, pages 1–20, 2009.
- [16] Alexandru Nica and Roland Speicher. *Lectures on the combinatorics of free probability*, volume 13. Cambridge University Press, 2016.
- [17] Roland Speicher. Free probability theory and non-crossing partitions. *Sém. Lothar. Combin*, 39, 1997.
- [18] Roland Speicher. Combinatorics of free probability theory. *Lectures IHP, París*, 1999.
- [19] Terence Tao. *Topics in random matrix theory*, volume 132. American Mathematical Soc., 2012.
- [20] Antonio M. Tulino and Sergio Verdú. *Random matrix theory and wireless communications*. Now Publishers Inc., 2004.
- [21] D. Voiculescu. Addition of certain non-commuting random variables. *Journal of Functional Analysis*, 66:223–235, 1986.
- [22] D. Voiculescu. Limit laws for random matrices and free products. *Inventiones Mathematicae*, 104:201–220, 1991.
- [23] D. Voiculescu, K. J. Dykema, and A. Nica. *Free Random Variables*, volume 1. CRM Monograph Series, American Mathematical Society, 1992.
- [24] Douglas B. West. *Introduction to Graph Theory*. Pearson Education, Inc., 2001.

-
- [25] E. Wigner. Characteristic vectors of bordered matrices with infinite dimensions. *Annals of mathematics*, 62:548–564, 1995.
- [26] J. Wishart. The generalized product moment distribution in samples from a normal multivariate population. *Biometrika* 20, pages 35–52, 1928.
- [27] Nouredine Zettili. *Quantum mechanics concepts and applications*. Wiley, 2 edition, 2009.
- [28] Alexander Zvonkin. Matrix integrals and map enumeration: An accessible introduction. *Mathematical and Computer Modelling* 26, 1997.