



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

UNA INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA
ESPECTRAL DE GRÁFICAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemática

P R E S E N T A:

SHEILA KEREN PALACIOS ALVARADO

TUTOR

DR. FRANCISCO JAVIER TORRES AYALA

Ciudad Universitaria, Cd.Mx., 2018



Agradezco al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica(PAPIIT), en particular al proyecto con clave IA105316, por su apoyo en la realización de la presente.

Índice general

Introducción	1
1. Nociones de Teoría de Gráficas	5
1.1. Operaciones entre Gráficas	9
1.2. Caminando en una Gráfica	9
1.3. Conexidad de una Gráfica	10
1.4. Matrices de Adyacencia	11
1.5. Las Potencias de la Matriz de Adyacencia y su Relación con los Caminos de una Gráfica	13
1.6. El Espectro de la Matriz de Adyacencia en Dimensión Finita . . .	13
1.6.1. El Ciclo de Longitud n	14
1.6.2. La Completa de Orden n	17
1.6.3. Una Gráfica Bipartita	20
1.7. Gráficas con Raíz	23
1.8. Gráficas de Cayley	24
2. El operador de Adyacencia	27
2.1. El Operador de Adyacencia en el caso Infinito	28
2.2. El Espectro del Operador de Adyacencia	31
2.3. Convergencia en Gráficas y su Asociación con la Convergencia de Operadores	37
3. Productos de Gráficas	49
3.1. El Producto Directo	49

3.1.1. El Operador de Adyacencia del Producto Tensorial	50
3.1.2. El Espectro del Producto Directo	53
3.2. El Producto Cartesiano	58
3.2.1. El Operador de Adyacencia del Producto Cartesiano	59
3.2.2. El Espectro del Producto Cartesiano	61
3.3. Distribuciones Espectrales	65
3.3.1. La Distribución de una Gráfica con Raíz	67
3.3.2. La Distribución de $G_1 \square G_2$	69
3.4. Espacios de Probabilidad No Conmutativos	74
3.4.1. Nuevas Nociones de Independencia	76
3.4.2. La Independencia Tensorial	77
3.5. El Producto Peine	79
3.5.1. El Operador de Adyacencia del Producto Peine	79
3.5.2. Independencia Monótona	82
3.6. El Producto Estrella	87
3.6.1. El Operador de Adyacencia del Producto Estrella	88
3.6.2. Independencia Booleana	91
3.7. El Producto Libre	94
3.7.1. Producto Libre de Espacios de Hilbert	96
3.7.2. Independencia Libre	102
3.7.3. Relación Entre el Producto Libre de Gráficas y la Independencia Libre	105
Algunas aplicaciones	111
A. Álgebras de Banach	117
B. Espacios de Hilbert	123
C. Productos Tensoriales de Espacios de Hilbert	129
Bibliografía	135

Introducción

La teoría espectral, a secas, surgió con nombre y apellido, hasta el siglo pasado. Sin embargo, según [34] su esencia puede ser rastreada hasta el teorema de los ejes principales, resultado geométrico que data desde finales del siglo XVI. Desde el ángulo del álgebra y la geometría, fue desenrollándose poco a poco. El siglo XX fue el que atestiguó su esplendor, en un intento más de fundamentar la explicación de diversos fenómenos físicos, recibiendo un gran impulso del repentino interés en la física cuántica y su cercana relación con ésta. Lützen dice en [27] “La historia de la teoría espectral es la historia de un área hermosa e importante con lazos cercanos a la física y una fuerte influencia en el desarrollo del análisis funcional.”

Por su parte, la teoría de gráficas tiene mérito propio, nacida del intento de simplificar un problema real y tangible ha venido desarrollándose desde el siglo XVIII, cuando Euler le dio el primer aliento de vida.

¿Dónde inicia entonces la teoría espectral de gráficas? Según Nica en [31], la teoría espectral de gráficas comienza al asociar matrices a gráficas. De entre las asociaciones más notables tenemos la de una gráfica con su matriz de adyacencia. Según Lützen, una de las tres raíces de la teoría espectral yace en los sistemas discretos descritos por matrices.

¿El principio básico? Asociar a una gráfica una matriz (y por ende un operador), que comúnmente será la de adyacencia, aunque no es la única posible; ¿Después? Usar las herramientas de espacios de Hilbert y teoría espectral, para analizar propiedades de las gráficas y establecer conexiones con otras áreas, es un buen punto de partida, como más adelante podrá apreciarse, para introducir espacios

algebraicos de probabilidad.

Por lo cual, es posible atreverse a afirmar que una de las principales bellezas de esta teoría es que no sólo es en sí misma, fructífera y completa; también es una puerta hacia otros caminos, algunos de los cuales asoman incluso hacia la física.

Uno de tales caminos, implica abordar los espacios de probabilidad no conmutativa, y las nuevas nociones de independencia en estos espacios, que son a su vez uno de los muchos senderos que arriban a la probabilidad libre, cuyo estudio está cada vez más en auge.

La teoría espectral de gráficas, es por supuesto, extremadamente amplia, y este trabajo no es más que una introducción dirigida principalmente a estudiantes de los últimos semestres de la licenciatura de matemáticas que deseen desde el área de análisis abordar esta teoría, donde los temas que usualmente no forman parte del temario en los cursos obligatorios de los primeros seis semestres de la licenciatura pueden encontrarse explicados de forma breve en los apéndices.

La estructura de la presente, es la siguiente:

En el primer capítulo, se encuentran las nociones básicas de la teoría de gráficas necesarias para introducirse en su estudio y comprender el resto del material.

El segundo capítulo continúa la idea de las matrices de adyacencia a dimensión infinita, llevándola hacia operadores en espacios de Hilbert. Correlacionando las ideas intuitivas de las gráficas con su noción abstracta como operadores, usando técnicas de análisis para probar diversos resultados e introduciendo y desarrollando la noción del espectro de una gráfica.

El tercer capítulo aborda un tipo particular de gráficas y sus respectivos operadores y espectros, este tipo de gráficas son las gráficas productos, cuya importancia radica en que nacen de la posibilidad de operar de forma binaria gráficas; partiendo de allí, se comienzan a tratar productos cuyo espectro no es ya propenso a ser determinado con alguna fórmula, por lo que se introducen los conceptos de distribuciones y estados, siendo esto punto de partida para hablar de espacios de probabilidad no conmutativos y las nociones de independencia que se relacionan con algunos productos de gráficas específicos. Se concluye, con una muy breve referencia a algunas aplicaciones conocidas y referencias para el lector interesado en ellas.

El objetivo primordial de este trabajo, es contribuir a tener presente que

Introducción

las matemáticas se tejen como una robusta red, cuyos puntos más fuertes son los nudos, amarres entre diferentes ramas y teorías, aquellas encrucijadas a las cuales es posible llegar partiendo de diferentes caminos iniciales; tal nudo es la teoría espectral de gráficas, puente de conexión entre el álgebra, el análisis funcional y la teoría de gráficas; entre otras áreas.

Capítulo 1

Nociones de Teoría de Gráficas

Hace casi tres siglos, en una historia que es conocida por todos, Leonhard Euler resolvió el famoso problema de los puentes de Königsberg, con técnicas innovadoras que dieron lugar a lo que ahora llamamos teoría de gráficas. La novedad consistió en abstraer los islotes y los puentes que conformaban a dicha ciudad rusa, a un conjunto de puntos y las conexiones entre ellos respectivamente.

Citando a Biggs [5]:

“Los orígenes de la teoría de gráficas son humildes, incluso frívolos. Pues mientras que muchas ramas de las matemáticas fueron motivadas por problemas fundamentales de cálculo, movimiento y medición; los problemas que llevaron al desarrollo de la teoría de gráficas eran muy a menudo, poco más que acertijos, diseñados para probar la ingenuidad, más allá de estimular.”

A partir de esto, intuitivamente, una gráfica podría entenderse como los elementos de un conjunto y sus relaciones. Para formalizar:

Definición 1.1: Una **gráfica** es una tripleta ordenada $G = (V(G), E(G), I_G)$ donde $V(G)$ y $E(G)$ representan conjuntos disjuntos, con $V(G)$ no vacío. A los elementos de estos conjuntos se les conoce como **vértices** y **aristas**, respectivamente; I_G es una relación, llamada de incidencia, que asocia a cada elemento de $E(G)$ un par de elementos de $V(G)$, estos pueden ser distintos o iguales.

Dada una arista a y dos vértices u y v relacionados por I_G , se dice que a

une a los vértices u y v , también se dice que u y v son los extremos de a . Suele denotarse $I_G(a) = uv$.

En muchos casos es posible dar una representación pictórica, trazando puntos para simbolizar vértices y líneas entre los puntos para representar a las aristas que los unen a sus respectivos vértices. Por supuesto, esta noción es meramente intuitiva.

Es importante notar, que dada la definición de este objeto llamado gráfica, no hay restricción alguna impuesta al tamaño de los conjuntos $V(G)$ y $E(G)$, por lo cual es común, dividir en distintos grupos a las gráficas según la cardinalidad de los conjuntos mencionados; y en el caso finito asignarle una notación particular a sus cardinalidades.

Definición 1.2: Se dice que una gráfica es finita si las cardinalidades de $V(G)$ y $E(G)$ son finitas. En caso contrario se dice que la gráfica es infinita. Cuando una gráfica es finita el número de aristas se denomina el tamaño de la gráfica y se denota por $m(G)$, a su vez, la cantidad de vértices se denomina el orden de la gráfica y se denota por $n(G)$.

Otra restricción ausente de la definición, es aquella que pudiese impedir la existencia de más de una arista entre dos vértices o una arista que conecte consigo mismo a un vértice. Sin embargo, por simplicidad o para permitir la validez de ciertos teoremas es preferible considerar gráficas en las que estas situaciones no existan; a esta simplicidad alude el nombre de este tipo de gráficas, cuya definición formal es la siguiente:

Definición 1.3: Una **gráfica simple** es aquella en la cual, para todo e en $E(G)$ los extremos de e son distintos y dada otra arista e_2 , al menos uno de los extremos de e_2 es distinto a los extremos de e .

A un conjunto de aristas cuyos extremos son iguales se le denomina **aristas múltiples**. Si los extremos de una arista son iguales entre sí, a esta arista se le llama **lazo**. Por lo que otra manera de expresar que una gráfica es simple es diciendo que no tiene lazos ni aristas múltiples.

Una de las muchas ventajas de considerar gráficas simples, es el hecho de que la primera definición de gráfica que se dió, puede ser reducida a la siguiente:

1. Nociones de Teoría de Gráficas

Definición 1.4: Se entenderá por **gráfica**, una pareja ordenada de conjuntos $G = (V(G), E(G))$ donde $V(G)$ es el conjunto de vértices de G y $E(G)$ es un conjunto de parejas distintas con elementos distintos de $V(G)$. Al conjunto $E(G)$ se le conoce como conjunto de aristas de G .

En general, se dejará claro el tipo de gráfica con la cual se está trabajando y se especificará si es simple o finita.

Por diversas cuestiones, algunas de ellas aplicadas, e.g. en el análisis de las estructuras de química orgánica, en ocasiones es de gran importancia diferenciar los vértices entre ellos. De esta necesidad surge la noción de gráfica etiquetada.

Definición 1.5: Se dice que la gráfica G está **etiquetada** si todos sus vértices son distinguibles unos de otros mediante una etiqueta tal como v_0, v_1, v_2, \dots

Un concepto de gran importancia es el de valencia o grado de un vértice, este se desarrolla de la manera siguiente:

Definición 1.6: Dado un vértice v_0 de la gráfica G se define el **grado** o **valencia** de v_0 como la cantidad de veces que dicho vértice aparece como extremo de una arista. Esta definición ya incluye el caso de aristas múltiples y gráficas no simples. A un vértice de grado cero se le conoce como **vértice aislado**. Si todos los vértices de una gráfica tienen la misma valencia k , se dice que la gráfica es **k -regular**. El grado de un vértice v_0 es denotado como $deg(v_0)$.

El concepto de grado puede extenderse a toda la gráfica G y se define el grado de G , denotado $\Delta(G)$, como el supremo de los grados de sus vértices.

En las matemáticas en general, es común considerar objetos que forman parte de otros y que respetan la estructura que poseen estos últimos. En el marco de la teoría de gráficas, un caso particular es el concepto de subgráfica:

Definición 1.7: Dada una gráfica G , una **subgráfica** H de G , es una terna ordenada $(V(H), E(H), I_H)$ tal que $V(H) \subset V(G)$, $E(H) \subset E(G)$ y como relaciones $I_H \subset I_G$. Esta es considerada propia si $V(H) \neq V(G)$ o $E(H) \neq E(G)$.

Más fuerte es la noción de subgráfica inducida:

Definición 1.8: H es una **subgráfica inducida** de G si cada arista e de G cuyos extremos están en $V(H)$, pertenece a $E(H)$. La gráfica inducida por un subconjunto $R \subset V(G)$, es aquella en que para todo v en R , cualquier elemento de $E(G)$ con un extremo en v pertenece al conjunto de aristas de dicha gráfica, ésta es llamada la subgráfica de G inducida por R . H una subgráfica de G , es llamada **generadora** si $V(H) = V(G)$.

También existe una noción de complementos para gráficas, estos se definen como sigue:

Definición 1.9: Si G una gráfica, el **complemento de G** denotado G^c o \overline{G} , es la gráfica tal que $V(G^c) = V(G)$ y dados u, v en $V(G)$ uv está en $E(G^c)$ si y sólo si uv no pertenece a $E(G)$. Es claro de la definición que $G^{cc} = G$.

Continuando con la idea de la preservación de estructuras, se requerirá una función que preserve la estructura de las gráficas, aquí es donde surge la noción de isomorfismo de gráficas.

Definición 1.10: Dadas dos gráficas G y H , se dice que estas son **isomorfas** (denotado $G \cong H$) si existen biyecciones $\phi : V(G) \rightarrow V(H)$ y también $\psi : E(G) \rightarrow E(H)$ tales que $I_G(e) = uv$ si y sólo si $I_H(\psi(e)) = \phi(u)\phi(v)$.

En general, ya sea por sus aplicaciones, belleza o valor teórico, existen gráficas notables. En este trabajo, algunas gráficas en particular tendrán cierta importancia, de entre ellas cabe definir las siguientes:

Definición 1.11: Una gráfica simple G es **completa** si cualesquiera dos distintos vértices de G son adyacentes. La gráfica completa de n vértices suele denotarse como K_n . Por otro lado, se dirá que una gráfica es **trivial** si $|V(G)| = 1$ y $|E(G)| = 0$.

Otra familia importante de gráficas es aquella de las gráficas k -partitas:

Definición 1.12: Se entenderá por una gráfica **k -partita**, a aquella cuyo conjunto de vértices pueda ser particionado en k subconjuntos no vacíos X_1, X_2, \dots, X_k tal que para toda i en $\{1, 2, \dots, k\}$ no hay aristas de G , que tengan como extremos a dos elementos del mismo subconjunto X_i .

1.1. Operaciones entre Gráficas

Una vez que los objetos con los que se trabajará están bien definidos, el siguiente paso es considerar como se relacionan unos con otros mediante comparaciones y operaciones. Operaciones más complejas entre gráficas, tales como productos, serán desarrolladas en el tercer capítulo.

Dos operaciones sencillas que se pueden hacer en una gráfica son el borrado de vértices y el borrado de aristas. Estas se llevan a cabo de la siguiente manera:

Definición 1.1.1: Dado S un subconjunto de $V(G)$, se define la gráfica en la que se borra este conjunto de vértices, denotada $G \setminus S$, como aquella en que $V(G \setminus S) = V(G) \setminus S$ y $E(G \setminus S) = E(G) \setminus U$ con U el conjunto que contiene a las aristas que tienen algún extremo en S .

Para el caso del borrado de aristas:

Definición 1.1.2: Dado $R \subset E(G)$, se define la gráfica $G \setminus R$, de tal forma que $V(G \setminus R) = V(G)$ y $E(G \setminus R) = E(G) \setminus R$.

1.2. Caminando en una Gráfica

El célebre acertijo de los puentes de Königsberg, se tradujo en un problema de lo que hoy se conoce como paseos eulerianos. A continuación, se abordarán algunas definiciones de los conceptos relacionados con esta área:

Un primer paso, es introducir la definición de camino:

Definición 1.2.1: Dada una gráfica G , se entiende por **camino** a una sucesión $W : v_0 e_1 v_1 e_2 \cdots v_{p-1} e_p v_p$ de vértices y aristas, que comienza y concluye con vértices, donde v_{i-1} y v_i son los extremos de la arista e_i en las que v_0 es el origen del camino y v_p el final. Se dice que el camino W une a v_0 con v_p , si $v_0 = v_p$ se dice que W es un **camino cerrado**. Cuando la gráfica es simple, un camino queda determinado por su secuencia de vértices y escribimos $W : v_1 v_2 v_3 \cdots v_p$. Por simplicidad, dado un camino en cuya secuencia v_0 y v_p sean los vértices inicial y final respectivamente, será llamado un $v_0 v_p$ -**camino**.

Dos nociones importantes derivadas de la noción de camino, son la de paseo y la de trayectoria:

Definición 1.2.2: Dada una gráfica G un **paseo** en G es un camino que no repite aristas. Es decir una sucesión $P : v_1 v_2 v_3 \cdots v_n$ tal que para cada $i, j, i \neq j$ con $1 \leq i$ y $j \leq n$, las aristas $v_i v_{i+1}$ y $v_j v_{j+1}$ son distintas. Si además $v_1 = v_n$ se dice que P es un **circuito**.

Definición 1.2.3: Una **trayectoria** es un camino (v_1, \dots, v_n) tal que no repite vértices. Es decir para cada $i, j, i \neq j$ con $1 \leq i$ y $j \leq n$, $v_i \neq v_j$. Si un circuito $T = v_1 \cdots v_n$ cumple $v_1 = v_n$, pero no se repite ningún otro vértice de la sucesión, entonces se dice que T es un **ciclo**.

Definición 1.2.4: Un **paseo euleriano** de la gráfica G , es un paseo de G tal que contiene a todas las aristas de G . Similarmente, un **circuito euleriano**, es un circuito de G que contiene a todas las aristas de G . Se dice que una gráfica G es **euleriana** si contiene un circuito euleriano.

1.3. Conexidad de una Gráfica

La noción de conexidad es de gran importancia en el análisis. En el caso de las gráficas, la idea de la conexidad es muy similar a la de conexidad por trayectorias en \mathbb{R}^n y es la siguiente:

Definición 1.3.1: Se dice que una gráfica G es **conexa** si y sólo si para cada par x, y en $V(G)$ tal que $x \neq y$ existe un xy -camino en G . Una **componente conexa** de una gráfica G , es una subgráfica máxima por contención de G , con la propiedad de ser conexa.

A veces es necesario conocer qué tan conexa es una gráfica, puede ser que, como se ejemplifica en [7], se esté modelando un sistema de redes eléctricas, donde los vértices serán torres generadoras y las aristas los cables que las conectan; podría plantearse el siguiente problema, ¿Cuántas torres de este sistema de distribución de electricidad pueden verse afectadas, sin que las comunidades a las que abastecen pierdan el servicio? En este y en muchos otros casos, es de interés saber cuántas aristas podrían quitarse en una gráfica sin que esta se

1. Nociones de Teoría de Gráficas

viera separada en más componentes de las que originalmente tenía. Así nacen conceptos como la k -conexidad de una gráfica y los conjuntos de corte.

Definición 1.3.2: Un conjunto $S \subset V(G)$ es un **conjunto de corte por vértices** de la gráfica G si $G \setminus S$ tiene más componentes conexas que G . Un **conjunto de corte por aristas** $R \subset E(G)$ de la gráfica G , es tal que si $G \setminus R$ tiene más componentes conexas que G . Existen por supuesto, indicadores numéricos de la conexidad de una gráfica. Entre estos se encuentra la conexidad por vértices.

Definición 1.3.3: Dada una gráfica conexa G , se define $\kappa(G)$ como el número tal que para cualesquiera $S \subset V(G)$ que cumple $|S| < \kappa(G)$; $G \setminus S$ es conexa. A este número se le conoce como la **conexidad por vértices** de G . También se define a $\kappa'(G)$ como el número tal que para todo $R \subset E(G)$, que cumple $|R| < \kappa'(G)$; $G \setminus R$ es conexa. Se dice que G es **k -conexa** si el conjunto de corte por aristas más pequeño es de tamaño al menos k .

Otro concepto importante es el de diámetro, que en el caso de gráficas finitas nos da una idea de la extensión de ellas.

Definición 1.3.4: Dada una gráfica G conexa y u, v en $V(G)$ la **distancia** entre u y v , denotada $d(u, v)$, se define como el mínimo de la cantidad de aristas presentes en todos los posibles uv -caminos. Se define el **diámetro** de G , denotado $diám(G)$ como el máximo de las distancias entre cualesquiera dos vértices de G . Es decir $diám(G) = máx\{d(u, v) | u, v \in V(G)\}$. Es posible incluir a las gráficas no conexas en la definición, respetando la siguiente convención: si dados u, v vértices de G no existe un camino que los una, se dice que $d(u, v) = \infty$.

1.4. Matrices de Adyacencia

Dos áreas cuya conexión pretende explorarse en este trabajo, son la teoría espectral y la teoría de gráficas. Sin embargo antes de hablar de esa relación, es conveniente hablar de aquella existente entre ciertas matrices finitas y las gráficas. En particular, abordaremos una manera particular de asociarle una matriz a una gráfica finita. No es la única y no es difícil encontrar otros ejemplos interesantes.

Definición 1.4.1: Dada una gráfica finita G con n vértices enumerados y distinguibles unos de otros; se define la **matriz de adyacencia** de G como la matriz cuadrada de $n \times n$ $A(G)$, donde la ij -ésima entrada de la matriz será la cantidad de aristas entre los vértices i y j de G .

Ejemplo 1.4.2: Consideremos la gráfica G , cuya representación visual es la siguiente:

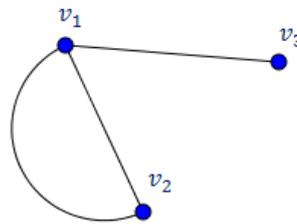


Figura 1.1: Gráfica G

Para construir su matriz de adyacencia, se observa en primera instancia que la gráfica no tiene lazos, también que los vértices v_1 y v_2 son adyacentes, pues entre ellos hay dos aristas; también v_1 y v_3 son adyacentes, ya que entre ellos hay una arista, sin embargo entre los vértices v_2 y v_3 no hay ninguna arista por lo que la matriz de adyacencia será la siguiente:

$$A(G) = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Otra matriz similar que es posible asociar a una gráfica es la matriz de incidencia. Difiere de la de adyacencia en que la de adyacencia se indexa sobre los vértices de G y es cuadrada; la de incidencia no necesariamente es cuadrada pues las columnas se indexan sobre las aristas de G y los renglones sobre sus vértices.

Es sencillo notar que si se suman las entradas de la matriz de adyacencia sobre un renglón o una columna, la suma dará el grado del vértice que indexa el renglón o columna en cuestión.

1.5. Las Potencias de la Matriz de Adyacencia y su Relación con los Caminos de una Gráfica

Dada una gráfica G con matriz de adyacencia A , las entradas de dicha matriz proporcionan detalles sobre las aristas de la gráfica en cuestión.

Sin embargo, es posible obtener aún más información de dicha gráfica usando a la matriz de adyacencia. Por ejemplo, las potencias de la matriz dan información de los caminos de la gráfica [4], como lo muestra la siguiente proposición:

Proposición 1.5.1: Sea A la matriz de adyacencia de una gráfica G donde $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$. Entonces la entrada ij de A^n , $n \geq 1$, es el número de $v_i v_j$ -caminos de longitud n , en G .

Demostración: Se llevará a cabo la prueba utilizando inducción. Para la base de inducción supongase $n = 1$, entonces $A^n = A^1 = A$. Por como fue definida la matriz de adyacencia, la entrada ij nos indica la cantidad de aristas entre los vértices v_i y v_j , pero dichas aristas son los $v_i v_j$ -caminos de longitud uno, por lo que la base de inducción es cierta.

Como hipótesis de inducción se supondrá que la proposición se cumple para n , es decir que la entrada ij de A^n , $n \geq 1$, es el número de $v_i v_j$ -caminos de longitud n en G .

Ahora se probará la validez para el caso $n + 1$ a fin de llevar a cabo el paso inductivo. Se sabe que $A^{n+1} = A^n A$. Por lo que la entrada ij de A^{n+1} puede verse como $\sum_{l=1}^n A_{il}^n A_{lj}$. Pero, por la hipótesis de inducción, se tiene que A_{il}^n es el número de caminos de longitud n que inician en v_i y terminan en v_l . Por otra parte A_{lj} , indica la cantidad de aristas entre el vértice v_l y el vértice v_j . Así para cada l , el sumando $A_{il}^n A_{lj}$ indica la cantidad de caminos de longitud $n + 1$ que inician en v_i y terminan en v_j , pasando en n -ésimo lugar por v_l . Al sumar sobre todos los v_l en $V(G)$ se obtiene la cantidad de caminos de longitud n que inician en v_i y terminan en v_j . Probandosé así la proposición. \square

1.6. El Espectro de la Matriz de Adyacencia en Dimensión Finita

Dada una gráfica G con matriz de adyacencia $A(G)$, se define el espectro de G , $\sigma(G)$, como los valores propios del operador asociado a $A(G)$. Como

1.6. El Espectro de la Matriz de Adyacencia en Dimensión Finita

observación, debe notarse que la matriz de adyacencia es simétrica y por lo tanto los valores propios serán reales. Es mucha la información que el espectro de una gráfica puede brindar, por ello, se trabajará alrededor de este conjunto. En este caso de dimensión finita el espectro es un conjunto discreto. En el apéndice A se define y describe al espectro de un operador de manera general.

Lo que a continuación se hará, es definir algunas gráficas populares y calcular su espectro.

1.6.1. El Ciclo de Longitud n

Un ciclo, definido en la sección 1.2, es una gráfica formada por un conjunto de vértices en donde cada vértice tiene valencia dos y además no se repiten aristas. El que sea de longitud n , indica que es de tamaño n . Se denota como C_n .

Consideremos el siguiente ejemplo:

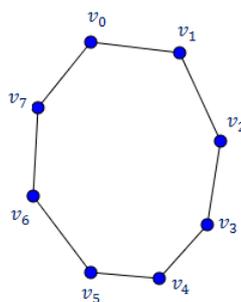


Figura 1.2: C_8

La matriz asociada a esta gráfica es la siguiente:

1. Nociones de Teoría de Gráficas

$$A(C_n) = \begin{matrix} & v_0 & v_1 & v_2 & & v_{i-1} & v_i & v_{i+1} & & v_{n-1} \\ \begin{matrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{matrix} & \left(\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right) \end{matrix}$$

Antes de calcular el polinomio característico asociado a esta matriz, obsérvese que es posible considerar a las entradas de cada uno de los renglones de esta matriz como corrimientos sucesivos de las entradas del primer renglon [4]. Esta observación permitirá calcular el determinante de $(A(C_n) - \lambda I)$.

Se denotará por $C_{[i]}$ a la i -ésima columna de la matriz $(A(C_n) - \lambda I)$. Sustituyase, sin pérdida de generalidad a $C_{[1]}$ por

$$C'_{[1]} = C_{[1]} + C_{[2]}\zeta + C_{[3]}\zeta^2 + \dots + C_{[n]}\zeta^{n-1},$$

donde ζ es una raíz n -ésima de la unidad. Dado que no se han realizado más que operaciones elementales como suma de columnas y multiplicación por escalares, el determinante de $(A(C_n) - \lambda I)$ no ha cambiado.

Si se define $\mu_\zeta = a_{11} + a_{12}\zeta + a_{13}\zeta^2 + \dots + a_{1(n-1)}\zeta^{n-2} + a_{1n}\zeta^{n-1}$, donde los a_{1j} son los valores del primer renglón de la matriz $(A(C_n))$, se tendrá que:

$$C'_{[1]} = \begin{pmatrix} \mu_\zeta - \lambda \\ \zeta(\mu_\zeta - \lambda) \\ \zeta^2(\mu_\zeta - \lambda) \\ \zeta^3(\mu_\zeta - \lambda) \\ \dots \\ \zeta^{n-1}(\mu_\zeta - \lambda) \end{pmatrix}$$

Esto dado que: $\mu_\zeta - \lambda = (a_{11} - \lambda) + a_{12}\zeta + a_{13}\zeta^2 + \dots + a_{1(n-1)}\zeta^{n-2} + a_{1n}\zeta^{n-1}$

y $\zeta(\mu_\zeta - \lambda) = a_{1n} + \zeta(a_{11} - \lambda) + a_{12}\zeta^2 + a_{13}\zeta^3 + \dots + a_{1(n-1)}\zeta^{n-1}$,

1.6. El Espectro de la Matriz de Adyacencia en Dimensión Finita

también:

$$\zeta^{n-1}(\mu_\zeta - \lambda) = a_{12} + a_{13}\zeta + a_{14}\zeta^2 + \cdots + a_{1n}\zeta^{n-2} + (a_{11} - \lambda)\zeta^{n-1}.$$

Por lo que para cualesquiera ζ raíz n -ésima de la unidad, se tendrá que $(\mu_\zeta - \lambda)$ aparece en la factorización del determinante. Por lo que el determinante podrá escribirse como el producto de factores de la forma $(\mu_\zeta - \lambda)$ y así, se tiene que μ_ζ está en el espectro.

Ahora, la búsqueda de elementos del espectro se reduce a observar que sucede con las μ_ζ conforme analizamos distintas raíces n -ésimas de la unidad.

Si ζ es una raíz n -ésima de la unidad, se tiene que:

$$\mu_\zeta = a_{11} + a_{12}\zeta + a_{13}\zeta^2 + \cdots + a_{1(n-1)}\zeta^{n-2} + a_{1n}\zeta^{n-1}.$$

En este caso particular, si $i \neq 1$ se tiene que $a_{ij} = 1$ si $j = i - 1$ o $j = i + 1$, si $i = 1$, $a_{ij} = 1$ si $j = i + 1$ o $j = n$. De cualquier forma, $a_{ij} = 0$ si $i = j$.

Consideremos ahora a ζ una raíz n -ésima de la unidad, entonces:

$$\mu_\zeta = 0 + 1\zeta + 0\zeta^2 + \cdots + 0\zeta^{n-2} + 1\zeta^{n-1} = \zeta + \zeta^{n-1}.$$

Dado que ζ es una raíz de la unidad, puede escribirse como:

$$\zeta = \cos\left(\frac{2\pi r}{n}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi r}{n}\right),$$

con r un natural que cumple $0 \leq r \leq n - 1$, para esa r :

$$\mu_\zeta = \cos\left(\frac{2\pi r}{n}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi r}{n}\right) + \cos\left(\frac{2\pi r(n-1)}{n}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi r(n-1)}{n}\right)$$

es un valor propio.

Por lo que el conjunto de valores propios del operador $A(C_n)$ coincide con el conjunto:

$$\left\{ \cos\left(\frac{2\pi r}{n}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi r}{n}\right) + \cos\left(\frac{2\pi r(n-1)}{n}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi r(n-1)}{n}\right) \mid 0 \leq r \leq n - 1 \right\}.$$

Pero por periodicidad se tiene que:

$$\begin{aligned} & \cos\left(\frac{2\pi r}{n}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi r}{n}\right) + \cos\left(\frac{2\pi r(n-1)}{n}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi r(n-1)}{n}\right) \\ &= \cos\left(\frac{2\pi r}{n}\right) + \cos\left(-\frac{2\pi r}{n}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi r}{n}\right) + i\operatorname{sen}\left(-\frac{2\pi r}{n}\right). \end{aligned}$$

1. Nociones de Teoría de Gráficas

Por la paridad de las funciones seno y coseno, lo anterior es igual a $2\cos(\frac{2\pi r}{n})$.
Por lo cual:

$$\sigma(A(C_n)) = \left\{ 2\cos\left(\frac{2\pi r}{n}\right) \mid 0 \leq r \leq n-1 \right\}.$$

Observandose por ello que 2 es un valor propio del conjunto.

1.6.2. La Completa de Orden n

Una gráfica completa de orden n , definida en 1.11, es una gráfica simple, donde cualesquiera dos vértices distintos son adyacentes, esta gráfica es denotada como K_n .

Un ejemplo de este tipo de gráfica es el siguiente:

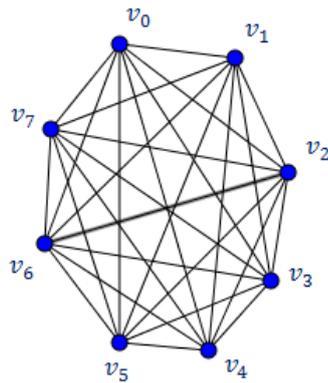


Figura 1.3: K_8

La matriz asociada a K_n es:

1.6. El Espectro de la Matriz de Adyacencia en Dimensión Finita

$$A_n = \begin{matrix} & v_0 & v_1 & v_2 & & v_{i-1} & v_i & v_{i+1} & v_{n-1} \\ \begin{matrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{matrix} & \left(\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 \end{array} \right) \end{matrix}$$

Para encontrar los valores propios de esta matriz, hay que calcular las raíces de su polinomio característico.

Esta matriz, tiene ceros en la diagonal y unos en todas sus demás entradas. Observando, como en el caso del ciclo de longitud n , que cada uno de los renglones de la matriz es un corrimiento del primero, es posible aplicar el desarrollo anterior, así los elementos del espectro podrán ser hallados analizando distintas raíces n -ésimas de la unidad.

Si ζ es una raíz n -ésima de la unidad, se tiene que

$$\lambda_\zeta = a_{11} + a_{12}\zeta + a_{13}\zeta^2 + \dots + a_{1(n-1)}\zeta^{n-2} + a_{1n}\zeta^{n-1},$$

es un elemento del espectro de la gráfica. Considerando las entradas de la matriz de adyacencia de una gráfica completa, se tiene que $a_{ij} = 1$ si $i \neq j$ y cero en otro caso.

Por lo que dada ζ raíz n -ésima de la unidad, $\lambda_\zeta = 0 + \zeta + \zeta^2 + \dots + \zeta^{n-2} + \zeta^{n-1}$ es valor propio del operador de adyacencia, pero es posible probar que esta suma, en el caso de una raíz de la unidad distinta de 1, siempre da -1 . Por lo cual, tomando las $n - 1$ raíces de la unidad, distintas de 1, se tiene que el valor propio asociado a cada una es -1 . Por otro lado, si la raíz de la unidad es 1, se tiene que $\lambda_1 = 0 + 1 + 1^2 + \dots + 1^{n-2} + 1^{n-1}$, entonces $\lambda_1 = n - 1$. Por lo que el espectro de la gráfica completa de orden n , es el conjunto $\{-1, n - 1\}$. Falta analizar la multiplicidad de estos valores propios, para ello se considerará a λ un valor propio del operador de adyacencia de la gráfica completa.

Luego, es necesario un vector $\bar{v} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ que cumpla:

1. Nociones de Teoría de Gráficas

$$A(K_n)(\bar{v}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

De lo cual, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \lambda x_1 &= x_2 + x_3 + \dots + x_{n-1} + x_n \\ \lambda x_2 &= x_1 + 0 + x_3 + \dots + x_{n-1} + x_n \\ &\vdots \\ \lambda x_{n-1} &= x_1 + x_2 + x_3 + \dots + 0 + x_n \\ \lambda x_n &= x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{n-1} \end{aligned}$$

Si existen λ en \mathbb{C} y \bar{v} en \mathbb{R}^n que cumplan esto, se tiene de la primera y última ecuación que :

$$\lambda x_n - \lambda x_1 = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{n-1} - x_2 - x_3 - \dots - x_{n-1} - x_n = x_1 - x_n$$

Es decir:

$$\lambda(x_n - x_1) = x_1 - x_n$$

Si $x_1 - x_n \neq 0$ entonces $\lambda = -1$.

De otra forma se tendría que $x_1 = x_n$, de la misma forma, considerando las otras ecuaciones por pares se obtiene $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_{n-1} = x_n$.

También, de la primera ecuación se cumpliría que $\lambda x_1 = (n-1)x_1$ y en general que $A(C_n)\bar{v} = \lambda\bar{v}$, cualquier vector \bar{v} , múltiplo del vector $(1, 1, \dots, 1)$ satisface esa ecuación, por lo cual la dimensión del subespacio invariante bajo el eigenvalor $n-1$ es uno. Dado que el rango de la matriz inicial es n , existen n vectores propios con valores propios distintos de cero, pero también, por el hecho de que los eigenvalores asociados pueden ser solamente -1 o $n-1$ y dado que la multiplicidad de $n-1$ es 1, se concluye que -1 tiene multiplicidad $n-1$.

1.6.3. Una Gráfica Bipartita

Una gráfica bipartita, caso particular de las k -partitas de la definición 1.12, es aquella para la cual existe una partición de su conjunto de vértices, en dos subconjuntos A y B , tales que las únicas aristas permitidas en G son aquellas que tienen un extremo en A y otro en B . Se dice que una gráfica bipartita es completa si dado cualquier vértice en A y cualquier vértice en B existe una arista en $E(G)$ que los une. Se denota a esta gráfica como $K_{s,t}$, donde s y t indican la cardinalidad de A y B respectivamente.

Dos ejemplos son los siguientes:

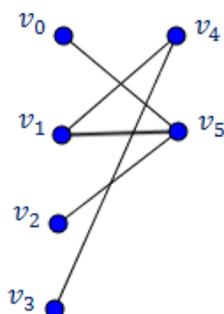


Figura 1.4: Una gráfica bipartita

Si esa gráfica fuera bipartita completa:

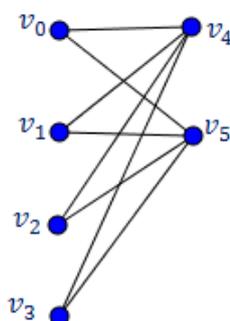


Figura 1.5: $K_{4,2}$

1. Nociones de Teoría de Gráficas

La matriz asociada a la gráfica bipartita completa $K_{n,m}$ es la siguiente:

$$A(K_{n,m}) = \begin{matrix} & v_0 & v_1 & v_2 & \dots & v_m & v_{m+1} & v_{m+2} & \dots & v_{m+n} \\ \begin{matrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \\ v_{m+1} \\ \vdots \\ v_{m+n} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Indexando primero todos los vértices de uno de los conjuntos partición y luego los vértices del otro.

Lo primero que se observa de esta matriz, es que está dividida en cuatro bloques, dos conformados por ceros y dos por unos.

$$\text{Es decir, es posible considerar: } A(K_{n,m}) = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$$

Con A en $M_{m-n \times m}$ y B una matriz en $M_{m \times m-n}$, ambas con todas sus entradas iguales a 1, donde esos ceros, representan a las correspondientes matrices cero.

Por ello, $-A(K_{n,m}) = MA(K_{n,m})M$, donde: $M = \begin{pmatrix} -C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$, con D y C matrices con todas sus entradas iguales a uno, en $M_{m \times m-n}$ y $M_{m-n \times m}$, respectivamente; los ceros continúan representando a las matrices cero adecuadas.

De esto $-A(K_{n,m})$ y $A(K_{n,m})$ tienen el mismo polinomio característico y por ende, los mismos valores propios. Por lo que los eigenvalores (reales, puesto que el operador asociado definido por $A(K_{n,m})$ es autoadjunto), serán simétricos con respecto al origen.

También, es posible observar que el rango de esta matriz es 2, ya que el máximo de columnas linealmente independientes que posee es dos, por lo cual, la dimensión del núcleo de la transformación asociada a la matriz de adyacencia es $n + m - 2$ por lo que 0 es un valor propio de dicha transformación con multiplicidad $n + m - 2$.

1.6. El Espectro de la Matriz de Adyacencia en Dimensión Finita

Resta encontrar dos valores propios de la transformación, dada la simetría con la recta real es suficiente encontrar uno para tener ambos. Sea $\bar{v} = (v_1, v_2, \dots, v_{n+m})$ en \mathbb{R}^{n+m} , supongase que $A(K_{n,m})\bar{v} = \lambda\bar{v}$, entonces:

$$\begin{pmatrix} v_{n+1} + v_{n+2} + \dots + v_{n+m} \\ v_{n+1} + v_{n+2} + \dots + v_{n+m} \\ \vdots \\ v_{n+1} + v_{n+2} + \dots + v_{n+m} \\ v_1 + v_2 + \dots + v_n \\ v_1 + v_2 + \dots + v_n \end{pmatrix} = A(K_{m,n})\bar{v} = \lambda\bar{v} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \\ \vdots \\ \lambda v_{n+1} \\ \lambda v_{n+2} \\ \vdots \\ \lambda v_{n+m} \end{pmatrix}$$

Si las últimas m entradas del vector fuesen idénticas entre sí, por ejemplo a x y las primeras n entradas entre sí a un y , con x, y en \mathbb{R} y $x \neq 0$, se tendría que:

$$\begin{pmatrix} mx \\ mx \\ \vdots \\ mx \\ ny \\ \vdots \\ ny \\ ny \end{pmatrix} = A(K_{m,n})\bar{v} = \lambda\bar{v} = \begin{pmatrix} \lambda y \\ \lambda y \\ \vdots \\ \lambda y \\ \lambda x \\ \vdots \\ \lambda x \\ \lambda x \end{pmatrix}$$

Por lo cual: $\lambda y = mx$ y $\lambda x = ny$, entonces $\frac{y}{x} = \frac{m}{\lambda} = \frac{\lambda}{n}$, de lo que $\frac{m}{\lambda} = \frac{\lambda}{n}$ y $\lambda^2 = mn$, por tanto $\lambda = \sqrt{mn}$, donde el vector propio asociado es:

$$\bar{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{m} \\ \sqrt{m} \\ \vdots \\ \sqrt{m} \\ \sqrt{n} \\ \vdots \\ \sqrt{n} \\ \sqrt{n} \end{pmatrix}$$

Además, por simetría $-\sqrt{mn}$, es el valor propio faltante.

Por todo lo anterior, el espectro de $K_{n,m}$ es el conjunto $\{0, \sqrt{nm}, -\sqrt{nm}\}$.

1. Nociones de Teoría de Gráficas

Para ilustrar, se analizará la bipartita completa $K_{m,n}$ con $m = 1, n = 2$, su representación pictórica es la siguiente:

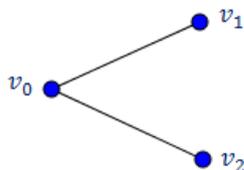


Figura 1.6: $K_{1,2}$

Se tiene que la matriz de adyacencia asociada es:

$$A(K_{1,2}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_0 & v_1 & v_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Considérese el polinomio característico de esta matriz:

$$p_\lambda = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

Entonces $p_\lambda = -\lambda^3 + 2\lambda = \lambda(2 - \lambda^2)$ y las raíces de este polinomio son reales y son $0, \sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$. Por lo que en este caso el espectro es el conjunto con esos tres elementos.

En las siguientes secciones se hablará de dos tipos de gráficas que serán empleadas en la teoría que se desarrollará más tarde.

1.7. Gráficas con Raíz

Algunas veces en una gráfica, un vértice en particular cobra cierta importancia. Por ejemplo en un modelo de flujos eléctricos donde un vértice representa al generador eléctrico.

A fin de centrar las propiedades y características de la gráfica sobre dicho vértice, surge el concepto de gráfica con raíz.

Definición 1.7.1: Una **gráfica con raíz** se define como una gráfica G en la cual un vértice particular v_1 ha sido señalado. A este punto distinguido se le llama comúnmente la raíz. Dicha gráfica denota por $\langle G, v_0 \rangle$.

Si G posee más de una raíz la notación se sustituye por $\langle G, C_G \rangle$, donde C_G es el conjunto de vértices distinguidos de G y está contenido en $V(G)$.

Para considerar un isomorfismo entre dos gráficas con raíz, es preciso que exista una correspondencia entre ellas que preserve la adyacencia y que además induzca una biyección entre conjuntos distinguidos de puntos.

Ejemplo 1.7.2: En la imagen se incluyen representaciones pictóricas de varias gráficas con raíz:

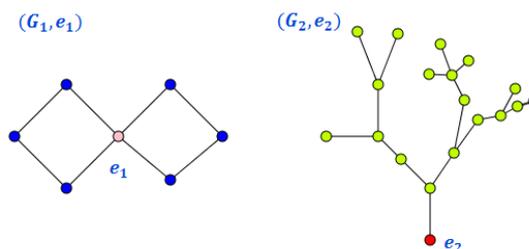


Figura 1.7: Dos gráficas con raíz

1.8. Gráficas de Cayley

Casi todas las áreas de las matemáticas desarrollan conexiones profundas entre ellas, la teoría de gráficas no es la excepción.

La conexión que se abordará de manera muy breve en esta sección, nace de la idea de considerar a los grupos finitamente generados como objetos geométricos.

Esta noción se desarrolla a través de las llamadas gráficas de Cayley, estas relacionan la teoría de gráficas de manera estrecha con el álgebra, particularmente con la teoría de grupos.

Dado un grupo finito K y $M \subset K$ tal que

- El neutro e no pertenece a M .

1. Nociones de Teoría de Gráficas

- Si a está en M entonces a^{-1} está en M .
- M genera a K

se puede construir una gráfica.

Definición 1.8.1: La **gráfica de Cayley** de K definida por el conjunto M , se define como sigue:

G será considerada de tal forma que sus vértices sean los elementos del grupo K , es decir $V(G) = K$. Para definir el conjunto de aristas de G , se dirá que dados dos elementos u, v de $V(G)$, la arista uv pertenecerá a $E(G)$ si y sólo si $u = mv$ con m un elemento de M .

Los conceptos e ideas presentados en este capítulo son meramente para la comprensión de los capítulos subsecuentes. El lector interesado puede consultar [4] y [7].

Capítulo 2

El operador de Adyacencia

En la sección 1.4 del capítulo anterior, se abordó la construcción de la matriz de adyacencia asociada a una gráfica finita. El siguiente paso, consiste en tratar de extender este concepto, de tal manera que pueda utilizarse en el estudio de gráficas infinitas.

Es importante hacer hincapié en que el siguiente capítulo se sustenta en ideas presentes en [29] y [30], el lector interesado puede consultarlos para conocer más resultados relacionados.

Así pues, sea $G = (V(G), E(G))$ una gráfica, finita o infinita, con la cardinalidad de $V = V(G)$ a lo más numerable, posiblemente con lazos y multiaristas; sea también $B(G) = (B_{u,v})_{u,v \in V}$ una matriz indexada por los vértices de G , con $B_{u,v}$ en \mathbb{R} para toda u, v en V . Un ejemplo de esta construcción que se tratará en la siguiente sección, es la matriz de adyacencia de la gráfica G .

Si G es finita, se considerará el operador que define $B(G)$ sobre \mathbb{R}^n . Pero, si G es infinita (numerable), se considerará el operador que define $B(G)$ sobre el espacio $\ell_p(V)$.

Se sabe que el espacio $\ell_p(V)$ es aquel cuyos elementos son las sucesiones indexadas en V que son p -sumables. Es decir, el espacio cuyos elementos son los $x = (x_v)_{v \in V}$ tal que:

2.1. El Operador de Adyacencia en el caso Infinito

$$\sum_{v \in V} |x_v|^p < \infty$$

Es importante recalcar que es posible trabajar en cualquiera de los espacios $\ell_p(V)$, sin embargo, como es usual se considerará sólo al espacio $\ell_2(V)$, porque el caso $p = 2$, es el único para el cual el espacio $\ell_p(V)$ es un espacio de Hilbert, y así se podrá usar la amplia gama de resultados y teoremas que se tienen para espacios de Hilbert se trabajará sobre $\ell_2(V)$.

Considerando a $B(G)$ como un operador sobre $\ell_2(V)$ y dado $y = B(G)x$ se tiene que:

$$y_u = \sum_{v \in V} b_{u,v} x_v, \quad u \in V$$

Por lo que el operador $B(G)$ estará bien definido sobre $\ell_2(V)$, siempre que esta serie sea convergente para toda u en V .

2.1. El Operador de Adyacencia en el caso Infinito

Primeramente, se introducirá la noción de finitud local.

Definición 2.1.1: Dada una gráfica G decimos que G es **localmente finita** si existe M en \mathbb{N} tal que $\Delta(G) \leq M$.

Ahora dada una gráfica G localmente finita, aunque no necesariamente finita, definimos a la **matriz de adyacencia** como la matriz A indexada por el conjunto de vértices $V = V(G)$; donde $A_{uv} = m$ donde m está dada por el número de aristas entre los vértices u y v .

Por lo dicho en el apartado anterior, A actúa a través de la multiplicación de matrices sobre $\ell_2(V)$ de la forma siguiente, dado $y = Ax$:

$$y_u = \sum_{v \in V} a_{u,v} x_v, \quad u \in V$$

2. El operador de Adyacencia

Observaciones:

- En el caso de las gráficas simples las entradas de la matriz toman valores en el conjunto $\{0, 1\}$; también $A_{uu} = 0$ para todo $u \in V$, pues en las gráficas simples no hay lazos.
- Dado que se excluyen por el momento las gráficas dirigidas, es posible afirmar que la matriz A es simétrica.

Una vez que se ha comprobado que el operador está bien definido, el camino a seguir es tratar de usar lo que se conoce del espacio de Hilbert sobre el que se está trabajando a fin de entender y ahondar más en las características y el comportamiento del operador $A(G)$. Tras ese impulso, surgen las siguientes proposiciones:

Proposición 2.1.2: Si $G = (V, E)$ es localmente finita entonces $A(G)$ actúa sobre $\ell_2(V)$ como un operador autoadjunto con norma a lo más $\Delta(G)$.

Demostración: Primero se probará que el operador es acotado, con norma a lo más $\Delta(G)$. Sea $x \in \ell_2(V)$, para calcular $\|A(x)\|$ se tiene que:

$$\|A(x)\|_2^2 = \sum_{u \in V} A(x)_u^2 = \sum_{u \in V} \left(\sum_{v \in V} |a_{u,v} x_v| \right)^2 = \sum_{u \in V} \left(\sum_{v \in V} |(a_{u,v})^{1/2} (a_{u,v})^{1/2} x_v| \right)^2.$$

Pero se puede emplear la desigualdad de Hölder para obtener que

$$\sum_{v \in V} |(a_{u,v})^{1/2} (a_{u,v})^{1/2} x_v| \leq \left(\sum_{v \in V} ((a_{u,v})^{1/2})^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{v \in V} ((a_{u,v})^{1/2})^2 |x_v|^2 \right)^{1/2}$$

De lo cual:

$$\sum_{v \in V} |a_{u,v} x_v| \leq \left(\sum_{v \in V} a_{u,v} \right)^{1/2} \left(\sum_{v \in V} a_{u,v} |x_v|^2 \right)^{1/2}.$$

Por ello:

$$\begin{aligned} \sum_{u \in V} \left(\sum_{v \in V} |a_{u,v} x_v| \right)^2 &\leq \sum_{u \in V} \left(\left(\sum_{v \in V} a_{u,v} \right) \left(\sum_{v \in V} a_{u,v} |x_v|^2 \right) \right) \\ \sum_{u \in V} (\deg(u) \sum_{v \in V} a_{u,v} |x_v|^2) &\leq \sum_{u \in V} (\Delta(G) \sum_{v \in V} a_{u,v} |x_v|^2) \leq \Delta(G) \sum_{u \in V} \sum_{v \in V} a_{u,v} |x_v|^2. \end{aligned}$$

Como para cada $v \in V$ se tiene que la cantidad de $u \in V$ tal que $a_{u,v} > 0$ es finita, es posible intercambiar las sumas

$$\Delta(G) \sum_{u \in V} \sum_{v \in V} a_{u,v} |x_v|^2 = \Delta(G) \sum_{v \in V} \sum_{u \in V} a_{u,v} |x_v|^2 =$$

2.1. El Operador de Adyacencia en el caso Infinito

$$\begin{aligned} \Delta(G) \sum_{v \in V} \deg(v) |x_v|^2 &\leq \Delta(G) \sum_{v \in V} \Delta(G) |x_v|^2 = \\ &\Delta(G)^2 \sum_{v \in V} |x_v|^2 = \Delta(G)^2 \|x\|_2^2. \end{aligned}$$

Se concluye pues, que para todo $x \in \ell_2(V)$, $\|A(x)\|_2 \leq \Delta(G) \|x\|_2$.

Por lo tanto $\|A\| \leq \Delta(G)$.

Ahora se probará que el operador es autoadjunto. Se tiene que:

$$\langle A(x), z \rangle = \sum_{u \in V} \left(\sum_{v \in V} a_{u,v} x_v \right) z_u,$$

por otra parte:

$$\langle x, A(z) \rangle = \sum_{u \in V} \left(\sum_{v \in V} a_{u,v} z_v \right) x_u.$$

Se infiere del primer inciso de la observación anterior que $a_{u,v} = a_{v,u}$. De tal forma que lo único que resta por probar es que se pueden intercambiar las sumas, pues de ser así se tendría que :

$$\sum_{u \in V} \left(\sum_{v \in V} a_{u,v} x_v \right) z_u = \sum_{u \in V} \left(\sum_{v \in V} a_{u,v} z_v \right) x_u,$$

que es la igualdad deseada.

Para probarlo, se tiene por un caso particular del teorema de Fubini, que si estas sumas convergen absolutamente es posible intercambiarlas. Considerando pues

$$\sum_{u \in V} \left(\sum_{v \in V} |a_{u,v} x_v z_u| \right),$$

es claro que para todo $u, v \in V$, $a_{u,v} \geq 0$, pues $a_{u,v}$ está definido cómo el número de aristas entre u y v , cantidad que siempre es no negativa. Así pues, es posible quitar el valor absoluto en la última suma, obteniendo:

$$\sum_{u \in V} \sum_{v \in V} a_{u,v} |x_v| |z_u|.$$

Usando la desigualdad de Hölder para $\ell_2(V)$, con $p = q = 2$ se tiene que:

$$\sum_{u \in V} \sum_{v \in V} a_{u,v} |x_v| |z_u| \leq \left(\sum_{u \in V} |z_u|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{u \in V} \left(\sum_{v \in V} a_{u,v} |x_v| \right)^2 \right)^{1/2},$$

2. El operador de Adyacencia

para ver que $A(G)$ era un operador acotado, se probó que

$$\left(\sum_{u \in V} \left(\sum_{v \in V} a_{u,v} |x_v| \right)^2 \right)^{1/2} \leq \Delta(G) \|x\|_2.$$

Luego,

$$\left(\sum_{u \in V} |z_u|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{u \in V} \left(\sum_{v \in V} a_{u,v} |x_v| \right)^2 \right)^{1/2} \leq \|z\|_2 \Delta(G) \|x\|_2.$$

Por lo que la serie converge absolutamente y las sumas pueden intercambiarse. \square

Es posible ir más allá de la afirmación anterior, planteando la finitud local como cuestión no sólo suficiente, sino también necesaria. Esto se comprueba por la siguiente afirmación:

Proposición 2.1.3: Si $A(G)$ actúa sobre $\ell_2(V)$ como un operador autoadjunto y acotado entonces $\Delta(G) < \infty$ i.e. G es localmente finita.

Demostración: Sea w en V . Debe recordarse que las sucesiones están indexadas sobre V .

Se define $(\delta_w)_v := \delta_{vw}$.

Obsérvese que esto implica que $\|\delta_w\| = 1$.

Luego

$$(A(\delta_w))_u = \sum_{v \in V} a_{u,v} (\delta_w)_v.$$

Entonces

$$(A(\delta_w))_u = \sum_{v \in V} a_{u,v} \delta_{vw} = \sum_{v \in V} a_{u,w} = \text{deg}(w).$$

Por ello $\text{deg}(w) \leq \|A(\delta_w)\|$.

Pero como A es acotada $\|A(\delta_w)\| \leq \|A\| \|\delta_w\| \leq \|A\| < \infty$.

Pero w era cualquier vértice de G , por lo que se concluye que G es localmente finita. \square

En la siguiente sección se expandirá el concepto de espectro de una gráfica, para gráficas localmente finitas.

2.2. El Espectro del Operador de Adyacencia

Dada G una gráfica numerable y localmente finita y A su operador de adyacencia, el espectro de la gráfica G , es el espectro del operador A . Además,

2.2. El Espectro del Operador de Adyacencia

se denota como $\sigma(G)$. La definición y clasificación del espectro de un operador puede encontrarse en el Apéndice A.

Más aún, se define el radio espectral de f como $r(f) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(f)\}$. Este funge como un indicador, para localizar a los elementos del espectro.

También, es importante mencionar que dado que el operador es autoadjunto, el radio espectral de G coincidirá con la norma del operador asociado a la gráfica (resultado abordado en A.8).

Nota: La definición dada del espectro, no depende del orden de nombramiento de los vértices. Pues al asignarseles una etiqueta distinta, el nuevo operador de adyacencia no será más que la conjugación con un operador unitario del operador de adyacencia anterior.

El siguiente resultado brinda una útil cota para el espectro de una gráfica, en función de su grado.

Corolario 2.2.1: Dado un operador de adyacencia acotado A , tenemos que $\sigma(A) \subseteq [-\Delta(G), \Delta(G)]$.

Demostración: Por las proposiciones A.1.1 y A.1.2 del apéndice 1, se tiene que $r(A) \leq \|A\|$ pero $\|A\| \leq \Delta(G)$ por lo que $r(A) \leq \Delta(G)$, entonces $\sigma(A) \subseteq [-\Delta(G), \Delta(G)]$. \square

Proposición 2.2.2: Sea G una gráfica, el operador de adyacencia $A = A(G)$ es compacto si y sólo si G tiene una cantidad finita de aristas.

Demostración: Si el operador de adyacencia es compacto y G tiene una cantidad infinita de aristas, es posible elegir una sucesión $\{(u_i, v_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$, con u_i, v_i vértices de G , tal que $\langle A(\delta_{u_i}), \delta_{v_i} \rangle \geq 1$ para toda i en \mathbb{N} .

Pero el conjunto $(\delta_{u_i})_{i \in \mathbb{N}}$ está acotado y A es compacto. Entonces la sucesión $(A(\delta_{u_i}))_{i \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente. Sea $(A(\delta_{u_{i_j}}))_{i_j \in \mathbb{N}}$ la subsucesión convergente, sea y el límite de dicha sucesión, siendo posible escribir $y = (y_j)_{j \in \mathbb{N}}$. Como $\langle A(\delta_{u_i}), \delta_{v_i} \rangle \geq 1$ para i en \mathbb{N} , entonces $y \neq 0$, de lo cual existe un índice k en \mathbb{N} tal que $y_k \neq 0$, luego por la continuidad del producto interior:

2. El operador de Adyacencia

$$\lim_{i_j \rightarrow \infty} \langle A(\delta_{u_{i_j}}), \delta_k \rangle = \langle \lim_{i_j \rightarrow \infty} A(\delta_{u_{i_j}}), \delta_k \rangle = \langle y, \delta_k \rangle = y_k \neq 0.$$

Por la proposición 2.1.2, A es autoadjunta, por lo cual

$$\langle A(\delta_{u_{i_j}}), \delta_k \rangle = \langle \delta_{u_{i_j}}, A(\delta_k) \rangle.$$

Pero $A(\delta_k)$ es fijo, entonces:

$$0 = \lim_{i_j \rightarrow \infty} \langle \delta_{u_{i_j}}, A(\delta_k) \rangle = \lim_{i_j \rightarrow \infty} \langle A(\delta_{u_{i_j}}), \delta_k \rangle = y_k \neq 0$$

Lo cual es una contradicción. Por lo tanto, G tiene una cantidad finita de aristas.

Ahora si se supone que G tiene una cantidad finita de aristas, entonces se tiene que la matriz de adyacencia tiene una cantidad finita de entradas distintas de cero, por lo que, dado un vector $w = (w_k)_{k \in V(G)}$ en $\ell_2(V(G))$; $A(w)$ estará en un espacio de dimensión finita. En particular para los vectores de la bola unitaria de $\ell_2(V(G))$. Pero en un espacio de dimensión finita cerrado y acotado es equivalente a compacto; por lo cual $\overline{A(B_1(0))}$ es compacta. Entonces, el operador A es compacto \square

Las siguientes proposiciones permiten, al estudiar el espectro de una gráfica, enfocarse en sus componentes conexas:

Proposición 2.2.3: Sea G una gráfica localmente finita y $G_1, G_2, G_3, \dots, G_m$ ajenas, con cada G_i una unión de componentes conexas de G , entonces

$$\sigma(A(G)) = \bigcup_{i=1}^n \sigma(A(G_i))$$

y el espectro puntual de $A(G)$ es la unión del espectro puntual de los $A(G_i)$, con $1 \leq i \leq n$.

Demostración: G puede verse como la suma directa: $G = \bigoplus_{i=1}^n G_i$.

Por lo cual si A es el operador de adyacencia de G y como las G_i son las componentes de G ; se tiene que $A = \bigoplus_{i=1}^n A_i$ donde A_i representa considerar sólo las aristas entre la componente G_i para la construcción del operador A , teniendo cero como valor, las entradas de A , indexadas sobre otras componentes.

2.2. El Espectro del Operador de Adyacencia

Se tiene que si $\lambda \in \sigma(A(G))$ entonces $A - \lambda I$ no es invertible. Es decir, $A_1 + \dots + A_n - \lambda I$ no es invertible. Nota: Se está considerando a I_i como la identidad restringida a los vértices que están en la componente G_i .

Retomando, $A_1 + \dots + A_n - \lambda(I_1 + \dots + I_n)$ no es invertible, esto indica que: $A_1 - \lambda I_1 + \dots + A_n - \lambda I_n$ no es invertible, por lo que alguno de los $A_i - \lambda I_i$ no es invertible. Es decir, λ pertenece a $\bigcup_{i=1}^n \sigma(G_i)$.

Para la otra contención, se tiene que λ está en $\bigcup_{i=1}^n \sigma(G_i)$. Luego, existe alguna i en $\{1, \dots, n\}$, tal que $A_i - \lambda I_i$ no es invertible. Considerando que $\bigoplus_{i=1}^n A_i = A$ se tiene que $A_1 + \dots + A_n - \lambda(I_1 + \dots + I_n) = A_1 + \dots + A_n - \lambda I$ no es invertible. Por lo cual λ pertenece a $\sigma(G)$ y por lo tanto $\sigma(G) = \bigcup_{i=1}^n \sigma(G_i)$.

Ahora se verá el espectro puntual en el caso finito:

Si λ está en $\bigcup_{i=1}^n \sigma_p(G_i)$, se tiene que λ pertenece a $\sigma_p(G_i)$, para alguna i en $\{1, \dots, n\}$, por lo cual, λ es un valor propio de A_i con vector propio asociado \bar{x} en $\ell_2(V)$, dada la naturaleza de los A_i se puede considerar a \bar{y} el vector $I_i(\bar{x})$. A su vez \bar{y} será vector propio de A con valor propio λ , dado que este operador es suma directa de los A_i . Por lo tanto λ pertenece a $\sigma_p(G)$.

Por otro lado, si λ no pertenece a $\bigcup_{i=1}^n \sigma_p(G_i)$ se tiene que para toda i en $\{1, \dots, n\}$ y para toda $\bar{x} \in \ell_2(V)$ $(A_i - \lambda I_i)(\bar{x}) \neq 0$, como el operador A es suma directa de los A_i se tiene que $(A_1 - \lambda I_1 + \dots + A_n - \lambda I_n)(\bar{x})$ es distinto de cero. Por lo que, $(A_1 + \dots + A_n - \lambda I)(\bar{x})$ no es cero. Entonces $(A - \lambda I)(\bar{x})$ es distinto de cero, pero \bar{x} era cualquiera. Por lo tanto, para toda \bar{x} en $\ell_2(V)$ se tiene que $(A - \lambda I)(\bar{x})$ es distinto de cero, por lo que λ no es valor propio de A . Por tanto, λ no pertenece a $\sigma_p(G)$ \square

A continuación se presenta un lema, para cuya prueba se usará la noción transformada de Gelfand (definida en A.10), los teoremas y definiciones necesarios para demostrarlo se encuentran en el apéndice A.

Lema 2.2.4: Si $T : H \rightarrow H$ es un operador acotado, autoadjunto y λ no está en el espectro de T , entonces $\|(T - \lambda I)^{-1}\| = \frac{1}{\text{dist}(\sigma(T), \lambda)}$.

Demostración: Dado que T es autoadjunto, se tiene por el teorema espectral, que la transformada de Gelfand es un isomorfismo isométrico.

Es decir que se cumple $|\Gamma_a((T - \lambda I)^{-1})| = \|(T - \lambda I)^{-1}\|$.

2. El operador de Adyacencia

Pero $|\Gamma_a((T - \lambda I)^{-1})| = |\Gamma_a^{-1}((T - \lambda I))|$. Por linealidad, lo anterior se convierte en $|\Gamma_a(T) - \lambda \Gamma_a(I)|^{-1}$. Recordando que T bajo Γ_a va a dar a la identidad y la identidad bajo Γ_a va a dar al uno por lo que, este último termino se convierte en $\sup_{z \in \sigma(T)} |(Z - \lambda)^{-1}|$.

Al sacar inversos multiplicativos de los elementos de un conjunto de números, el supremo del conjunto, se convertira en el infimo del conjunto de los inversos. Luego, dicho supremo no es más que : $\inf_{z \in \sigma(T)} |(Z - \lambda)|$ que por definición es $dist(\lambda, \sigma(T))$ \square .

Proposición 2.2.5: Sean G_1, G_2, G_3, \dots las componentes conexas de G . Entonces $\sigma(A(G))$ es la cerradura de $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \sigma(A(G_i))$, y el espectro puntual del operador $A = A(G)$ es la unión del espectro puntual de los $A(G_i)$, con i en \mathbb{N} .

Demostración: Para el caso del espectro usual:

Dado λ en $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \sigma(A(G_i))$, se tiene que para alguna $i \in \mathbb{N}$, λ pertenece a $\sigma(A(G_i))$. Considerando las uniones de componentes G_i y $G \setminus G_i$, la descomposición de G es finita; luego, por la proposición 2.2.2 λ se encuentra en $\sigma(A(G))$.

Ahora se probará la otra contención.

Sea λ en $\sigma(A(G))$, para toda $\epsilon > 0$, existe una \bar{x} en $\ell_2(V(G))$ tal que $\|\bar{x}\| = 1$ y $\|(A_G - \lambda I)(\bar{x})\| < \frac{\epsilon}{2}$. De lo contrario $A_G - \lambda I$ sería invertible.

Considerando P_n la proyección al subespacio $\bigoplus_{i \leq n} \ell^2(V_i)$, con $V_i = V(G_i)$ y donde n es tan grande que $\|P_n(x)\| \geq \frac{1}{2}$, como P_n es la proyección a dicho subespacio, por construcción A_G conmuta con P_n ; ahora se considerará $\bar{y} = \frac{P_n \bar{x}}{\|P_n \bar{x}\|}$. Luego $\|(P_n A - \lambda I)\bar{y}\| = \|P_n(A - \lambda I)\bar{y}\|$, recordando que P_n es una proyección y por lo tanto, $\|P_n\| \leq 1$. Se tiene que $\|P_n(A - \lambda I)\bar{y}\| \leq \|(A - \lambda I)\bar{y}\| = \frac{\|(A - \lambda I)P_n(\bar{x})\|}{\|P_n(\bar{x})\|}$. Como la proyección conmuta con A y la identidad se tiene que lo anterior es $2\|P_n(A - \lambda I)(\bar{x})\|$ que a su vez es menor o igual que $2\|(A - \lambda I)\bar{x}\| < \epsilon$.

Luego $\|P_n A - \lambda I\| \|\bar{y}\| < \epsilon$.

Ahora se considerarán dos casos:

Si λ pertenece al espectro de $P_n A$ para alguna n , entonces por la Proposición 2.2.2, λ está en el espectro alguna de las componentes G_i con $i \leq n$. Por lo cual λ pertenece a la unión $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \sigma(A(G_i))$.

2.2. El Espectro del Operador de Adyacencia

Si λ no pertenece al espectro de $P_n A$ para ninguna n en los \mathbb{N} , dado que $P_n A$ es autoadjunto (pues A lo era), se tiene por el lema 2.2.3 que :

$$\frac{1}{\text{dist}(\lambda, \sigma(P_n A))} = \|(P_n A - \lambda)^{-1}\|.$$

Pero además, $\|(P_n A - \lambda)^{-1}(P_n A - \lambda)\| = 1$ se tiene que se cumple la desigualdad $\frac{1}{\|(P_n A - \lambda)^{-1}\|} \leq \|(P_n A - \lambda)\|$. Por lo que $\text{dist}(\lambda, \sigma(P_n A)) \leq \|(P_n A - \lambda)\|$ concluyéndose que $\text{dist}(\lambda, \sigma(P_n A)) < \epsilon$.

Pero es posible restringir $P_n A$ a $\bigoplus_{i \leq n} G_i$, por lo cual tiene una cantidad finita de componentes, es importante notar que dada $n \geq i$ $P_n A$ restringido a G_i es igual a $A(G_i)$, por lo cual su espectro es el mismo. Ahora usando la proposición 2.2.2: $\sigma(P_n A) = \bigcup_{i=1}^n \{\sigma(P_n A(G_i))\}$. Por ello, existe $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $\lambda_i \in \sigma(P_n A(G_i))$ tal que $|\lambda - \lambda_i| < \epsilon$. Pero ϵ era arbitraria, por lo tanto $\lambda \in \overline{\bigcup_{i \in I} \{\sigma(A(G_i))\}}$.

Para el espectro puntual:

Primeramente se demostrará que $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \sigma_p(A(G_i)) \subseteq \sigma_p(A(G))$.

Para ello se escogerá λ que no pertenezca a $\sigma_p(A(G))$, eso significa que $A - \lambda I$ es invertible y \bar{x} en $\ell_2(V](G)$ $((A - \lambda I)(\bar{x})) \neq 0$, en particular para $\bar{y} = \sum_{v \in V_i} \delta_v$. Pero $(A - \lambda I)(\bar{y}) = A_i(\bar{y})$ En particular λ no está en $\sigma_p(A(G_i))$ para ninguna i , por lo cual, $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \sigma_p(A(G_i)) \subseteq \sigma_p(A(G))$.

Ahora se probará la segunda contención:

Si λ pertenece al $\sigma_p(A(G))$ entonces A tiene vectores propios. En particular, dado v un vector propio de A , como v está en $\ell_2(V(G))$, dado que:

$$\ell_2(V(G)) = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \ell_2(V_i),$$

entonces v posee una descomposición $v = \sum_{i=1}^{\infty} v_i$, con v_i en $\ell_2(V_i)$. Por como se definió A para todo i en \mathbb{N} se tiene que $\ell_2(V_i)$ es A invariante. Como v es vector propio, $A(v) = \lambda v$.

De donde $Av = \lambda(\sum_{i=1}^{\infty} v_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda v_i$.

Por ser vector propio $v \neq \bar{0}$. Así que al menos existe una h en los naturales, tal que $v_h \neq 0$. Por ser suma directa $Av_h = \lambda v_h$. Por lo cual v_h es vector propio

2. El operador de Adyacencia

de A restringida a V_h . De la definición se tiene que $A(G_h)$ es la restricción de A a V_h .

Por lo cual, $\lambda \in \sigma_p(A(G_h))$, así que $\lambda \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \sigma_p(A(G_i))$.

Por lo que se concluye que: $\sigma_p(A(G)) \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \sigma_p(A(G_i))$. \square

2.3. Convergencia en Gráficas y su Asociación con la Convergencia de Operadores

Una noción muy importante dentro de las matemáticas es la de convergencia, en esta sección se abordarán las nociones necesarias para extender este concepto a gráficas.

Definición 2.3.1: Dadas H_1, H_2, \dots subgráficas de una gráfica G ; se dice que la sucesión H_1, H_2, \dots **converge** a G (denotado $H_n \rightarrow G$, cuando $n \rightarrow \infty$), si para toda $e \in E(G)$ existe un natural N que depende de e , de tal manera que e pertenece a $E(H_n)$, para toda $n \geq N$.

Definición 2.3.2: Sea X un espacio de Hilbert. Dados $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$, con $A_n : X \rightarrow X$ para cada n en \mathbb{N} , operadores lineales, decimos que la sucesión $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ **converge fuertemente** (o en la topología fuerte de dicho espacio) al operador $A : X \rightarrow X$, si para toda x en X y para toda $\epsilon > 0$; se tiene que existe N en \mathbb{N} tal que si $n \geq N$ entonces $\|A(x) - A_n(x)\| < \epsilon$.

Proposición 2.3.3: Sean H_1, H_2, \dots subgráficas de una gráfica G , donde se cumple $A_n = A(H_n)$ y sea $A = A(G)$ acotado. Luego $H_n \rightarrow G$ si y sólo si $A_n \rightarrow A$ fuertemente, es decir, para toda $\bar{x} \in \ell_2(V(G))$, $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n \bar{x} = A \bar{x}$.

Demostración: Para la ida se considerará lo siguiente:

Sea $\bar{x} \in \ell_2(V)$ y sea M el grado máximo de G . Por la proposición 2.1 $\|A\| \leq M$. Cómo H_n es una subgráfica de G , para todo n natural se tiene que también $\|A_n\| \leq M$.

Ahora, sea $\epsilon > 0$.

Se considerará el truncamiento de \bar{x} . Es decir \bar{x}^m , donde $\bar{x}_i^m = \bar{x}_i$ si $i > m$ y

2.3. Convergencia en Gráficas y su Asociación con la Convergencia de Operadores

$\bar{x}_i^m = 0$ si $i \leq m$. Lo que se está haciendo es considerar la cola de la sucesión $\{\bar{x}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, puesto que $\bar{x} \in \ell_2(V)$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\|\bar{x}^m\| < \frac{\epsilon}{2M}$.

Por otra parte, como H_n es subgráfica de G y G es localmente finita, al considerar las entradas de la matriz asociada a el $A(H_n)$, dado un renglón i fijo con $i \leq m$, al realizar la suma de las entradas en todas las columnas j , con $j \in \mathbb{N}$, la suma es finita. Dado que la suma sobre el renglón i , da el grado de i , como G es localmente finita, esta suma es finita y para cada renglón desde 1 hasta m , la podemos acotar por M , el grado máximo de G . Por lo cual al considerar una cantidad finita de renglones de la matriz, la suma de las entradas de la matriz sobre dichos renglones será finita.

Sea R la suma de los grados de los primeros m vértices. Para esas R aristas en $E(G)$, por la definición de convergencia en gráficas, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $a_{ij}^n = a_{ij}$ para toda $n \geq k$, para toda $i \leq m$ y para todo $j \in \mathbb{N}$, donde a_{ij}^n denota la entrada ij de la matriz asociada al operador de adyacencia de H_n .

Como además la matriz A_n es simétrica se tiene que para $j \leq m$ y para toda i en \mathbb{N} , se cumple que $a_{ij}^n = a_{ij}$.

Por lo cual, al comparar a los operadores A y A_n , se tendrá que para toda i, j tal que i está en \mathbb{N} y $j \leq n$ o j está en \mathbb{N} e $i \leq n$, A y A_n coinciden.

Por ende, la matriz asociada al operador A_n es la siguiente:

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & a_{1(m+1)} & a_{1(m+2)} & \dots \\ a_{21} & a_{12} & \dots & a_{2m} & a_{2(m+1)} & a_{2(m+2)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ a_{1i} & a_{2i} & \dots & a_{im} & a_{i(m+1)} & a_{i(m+2)} & \dots \\ a_{1(i+1)} & a_{2(i+1)} & \dots & a_{m(i+1)} & a_{(i+1)(m+1)}^n & a_{(i+1)(m+2)}^n & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

De ello, las entradas de la matriz asociada al operador $A - A_n$ serán de la siguiente forma: $b_{ij}=0$ si para toda i, j tal que i está en \mathbb{N} y $j \leq n$ o j está en \mathbb{N} y $i \leq n$ y $b_{ij}= a_{ij}^n$ en otro caso.

Así, la matriz del operador $A - A_n$ será de la siguiente forma:

2. El operador de Adyacencia

$$A - A_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{(i+1)(m+1)}^n & a_{(i+1)(m+2)}^n & a_{(i+1)(m+3)}^n & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{(i+2)(m+1)}^n & a_{(i+2)(m+2)}^n & a_{(i+2)(m+3)}^n & \dots \\ \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Entonces, dado que las primeras m entradas del truncamiento m -ésimo de \bar{x} son cero; se obtiene la siguiente igualdad:

$$\|(A - A_n)\bar{x}\| = \|(A - A_n)\bar{x}^m\|.$$

Por desigualdad del triángulo, esto es menor o igual que:

$$\|A\bar{x}^m\| + \|A_n\bar{x}^m\|.$$

Por ser operadores acotados, es también menor o igual a:

$$\|A\| \|\bar{x}^m\| + \|A_n\| \|\bar{x}^m\|.$$

Agrupando, se tiene que: $(\|A\| + \|A_n\|) \|\bar{x}^m\| \leq 2M(\frac{\epsilon}{2M})$.

Para probar el regreso, sean u y v vértices de G y e la arista que los une.

Como la sucesión A_n converge a A fuertemente, cuando n tiende a infinito, entonces dada $\epsilon > 0$ y cualquier vector \bar{x} en $\ell_2(V(G))$, se tiene que:

$$\|A_n(\bar{x}) - A(\bar{x})\| < \epsilon.$$

Así pues, considérese el véctor \bar{x} en $\ell_2(V(G))$ definido como sigue si $l = v_0$ entonces $\bar{x}_l = 1$, en otro caso $\bar{x}_l = 0$. Y sea $\epsilon = \frac{1}{2}$. Luego, existe una k en \mathbb{N} tal que para todo n natural, si $n \geq k$, se tiene que:

$$\|A_n(\bar{x}) - A(\bar{x})\| < \frac{1}{2}.$$

En particular: $\|A_n(\bar{x}) - A(\bar{x})\|^2 < \frac{1}{4}$.

Por como se definió al vector \bar{x} :

$$\frac{1}{4} > \|A_n(\bar{x}) - A(\bar{x})\|^2 = \sum_{u \in V} (a_{uv_0}^n - a_{uv_0})^2.$$

Donde las a_{uv} y las a_{uv}^n son las entradas de la matrices asociadas a los operadores A y A_n respectivamente. Por lo que de la desigualdad anterior, se tiene que:

2.3. Convergencia en Gráficas y su Asociación con la Convergencia de Operadores

$$\sum_{u \in V} (a_{uv_0} - a_{uv_0}^n)^2 < \frac{1}{4}.$$

Pero dado que se trata de matrices asociadas a operadores de adyacencia, sus entradas son números enteros. Si existiera una u en $V(G)$ tal que a_{uv_0} es distinta de $a_{uv_0}^n$ entonces la resta $a_{uv_0} - a_{uv_0}^n$ sería mayor que 1 y no se cumpliría la desigualdad.

Por lo cual para toda u en V , $a_{uv_0} = a_{uv_0}^n$. En particular, la arista e al pertenecer a $E(G)$ está representada en a_{uv_0} para alguna u . Por lo anterior, e también debe estar en $E(H_n)$. Lo cual prueba que la sucesión de subgráficas $H_1, H_2, H_3, \dots, H_n$ converge a la gráfica G . \square

Ejemplo 2.3.4: Se considerará el siguiente ejemplo para ilustrar teorema anterior, aclarando así que la convergencia en la topología fuerte, no implica necesariamente convergencia en norma.

Sea G la gráfica definida como sigue:

$$V(G) = \{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$$

$$E(G) = \{\delta_{v_i v_j} \mid i \text{ es impar}, j = i + 1\}$$

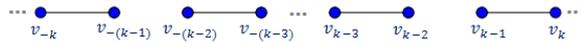


Figura 2.1: La gráfica G

La matriz asociada a su operador de adyacencia es la siguiente:

$$A(G) = \begin{matrix} & & v_{-2} & v_{-1} & v_0 & v_1 & v_2 & & \\ & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ v_{-2} & \left(\begin{array}{cccccc} \ddots & & & & & \\ \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \right) & & \\ v_{-1} & & & & & & & & \\ v_0 & & & & & & & & \\ v_1 & & & & & & & & \\ v_2 & & & & & & & & \end{matrix}$$

2. El operador de Adyacencia

Ahora se considerará dada k impar en \mathbb{Z} a G_k como la gráfica cuyos vértices están en el conjunto $\{v_{-k}, v_{-k+1}, \dots, v_{-1}, v_0, v_1, \dots, v_{k-1}, v_k\}$ y cuyas aristas son las que unían a dichos vértices en la gráfica original.



Figura 2.2: La gráfica G_k

La matriz asociada a su operador de adyacencia es:

$$A(G_k) = \begin{matrix} & v_{-k} & v_{-k+1} & v_{-k+2} & & v_{-1} & v_0 & v_1 & & v_k \\ \begin{matrix} v_{-k} \\ v_{-k+1} \\ v_{-k+2} \\ \vdots \\ v_{-1} \\ v_0 \\ v_1 \\ v_k \end{matrix} & \left(\begin{array}{cccccccccc} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right) \end{matrix}$$

Tenemos entonces que G_k es una gráfica disconexa, con una cantidad finita de componentes conexas idénticas. Como cada una de estas componentes conexas es una gráfica finita, tenemos por la proposición 2.2.5, que se cumple $\sigma(A(G_k)) = \bigcup_{k=1}^n \sigma(A(H_k))$, donde dada k impar en \mathbb{Z} , H_k es la gráfica que tiene como vértices a los vértices de la gráfica original G y cuya única arista es la que originalmente existía en G entre los vértices v_k y v_{k+1} .

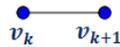


Figura 2.3: La gráfica H_k

La matriz asociada a su operador de adyacencia es:

2.3. Convergencia en Gráficas y su Asociación con la Convergencia de Operadores

$$A(H_k) = \begin{matrix} & v_k & v_{k+1} \\ \begin{matrix} v_k \\ v_{k+1} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Además en cada caso $\sigma(A(H_k))$ es puntual y fácil de calcular, pues consiste únicamente en 1 y -1 .

Regresando a la gráfica G , se sabe que 1 es el grado máximo de G , por lo que $\|A\| \leq 1$. Como además $\sigma(A(G_k)) = \bigcup_{k=1}^n \sigma(A(H_k))$, entonces $\sigma(A(G_k)) = \{-1, 1\}$.

Considerando también al vector \bar{x} en $\ell_2(V)$, el primer canónico de ese espacio, se tiene que :

$$\|A\bar{x}\| = \|(0, 1, 0, 0, \dots)\| = 1 = 1\|\bar{x}\|$$

Por lo tanto $\|A\| = 1$.

Por otra parte se sigue de la definición que la sucesión de las G_k converge como gráfica a G , verificándose así el teorema. De hecho, en este caso particular, se tiene considerando el mismo argumento que para G que dada n en \mathbb{N} , $\|A(G_k)\| = 1$.

Sin embargo, no se da la convergencia en norma, ya que dadas $\epsilon = \frac{1}{2}$ y n en \mathbb{N} , se tiene que:

Considerando al operador $A - A(G_n)$, y al hecho de que dicho operador tiene la misma matriz asociada, que el operador B donde este último es el de adyacencia asociado a la gráfica $G \setminus G_n$ se tiene que $\|B\| = \|A - A(G_n)\|$, por lo que $\|A - A(G_n)\| \leq 1$, pues uno es el valor del grado máximo de G y por tanto de cualquier subgráfica de ella. Ahora, dado $\overline{\delta_{n+1}}$ de norma uno, en $\ell_2(V(G))$. Se cumple que $\|(A - A(G_k))(\overline{\delta_{n+1}})\| = 1 = 1\|\overline{\delta_{n+1}}\|$. De lo cual $\|A - A(G_k)\| = 1 > \frac{1}{2} = \epsilon$. Por lo que no converge en norma.

Ejemplo 2.3.5: Este ejemplo es conocido como el camino infinito, denotado por P_∞ . Considerese la gráfica definida de la siguiente manera, el conjunto de vértices será $V(G) = \{v_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$. $\delta_{v_i v_k}$ es una arista de G si y solamente si $i = k - 1$ o $i = k + 1$.

Una idea de la representación visual de esta gráfica es la siguiente:

2. El operador de Adyacencia

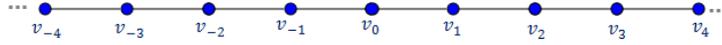


Figura 2.4: La gráfica P_∞

La matriz asociada a su operador de adyacencia es la que sigue:

$$A(P_\infty) = \begin{matrix} & v_{-2} & v_{-1} & v_0 & v_1 & v_2 & & \\ \begin{matrix} v_{-2} \\ v_{-1} \\ v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \end{matrix}$$

También, se define la gráfica P_k , como aquella cuyo conjunto de vértices consiste en $\{v_{-k}, v_{-k+1}, v_{-k+2}, \dots, v_{-2}, v_{-1}, v_0, v_1, v_2, \dots, v_{k-2}, v_{k-1}, v_k\}$, y las aristas originales de G que los conectan, para cada k en los naturales P_k es una gráfica finita.

Además, la sucesión $\{P_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ cuando k tiende a infinito, converge como gráfica a G . Puesto que, dada una arista e en G , esta une a dos vértices consecutivos v_j y v_{j+1} para cierta j en \mathbb{N} , por como se definieron las gráficas P_k esta arista vive en la gráfica P_{j+1} y esta sucesión converge a la gráfica G .

Se tiene entonces una sucesión de gráficas finitas que convergen a G . Considerando ahora su operador asociado (bajo la inclusión), por el teorema anterior, el operador $A(P_k)$ converge en la topología fuerte al operador A . Sin embargo, la convergencia en norma tampoco se da. Ya que, por como está definida P_k , las matrices asociadas a los operadores A y $A(P_k)$ coincide en las entradas ij , donde i y j son ambos mayores o iguales que $-k$ y menores o iguales que k . Luego, considerando el operador $A - A(P_k)$, no importa que tan grande sea k , la entrada $B_{(k+1)(k+2)}$ y todas las que la suceden será distinta de cero y será uno o dos, dado el vector δ_{k+1} en $\ell_2(V)$, $\|(A - A(P_k))(\delta_{k+1})\| \geq 1\|\delta_{k+1}\|$ por lo que en todo caso $\|A - A(P_k)\| \geq 1$. Resultando imposible que se dé la convergencia en norma.

2.3. Convergencia en Gráficas y su Asociación con la Convergencia de Operadores

Después de los ejemplos, es necesario seguir explorando la noción de convergencia en gráficas. Primeramente abordaremos un lema que será muy útil para el resto de este capítulo y se enunciará y probará de forma un poco más general:

Lema 2.3.6: Si T_1, T_2, \dots es una sucesión de operadores autoadjuntos en un espacio de Hilbert H , que convergen en la topología fuerte a un operador T de dicho espacio, entonces se tiene que $\|T\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|$.

Demostración: Se sabe que la norma de un operador autoadjunto en un espacio de Hilbert está dada por:

$$\|T\| = \sup_{x \in \ell_2(V)} \{|\langle Tx, x \rangle| : \|x\| = 1\}.$$

Por la misma razón dado n en \mathbb{N} , $\|T_n\| = \sup_{x \in \ell_2(V(G))} \{|\langle T_n x, x \rangle| : \|x\| = 1\}$.

Ahora dada $\epsilon > 0$ se considerará $\bar{x}' \in \ell_2(V)$, unitario, tal que:

$$|\langle T\bar{x}', \bar{x}' \rangle - \|T\|| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Se tiene además, que $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge fuertemente a A . Así, para toda $\bar{x} \in H$ se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_n \bar{x}, \bar{x} \rangle = \langle T\bar{x}, \bar{x} \rangle$. En particular para \bar{x}' , existe N en \mathbb{N} tal que si $n \geq N$ entonces $|\langle T_n \bar{x}', \bar{x}' \rangle - \langle T\bar{x}', \bar{x}' \rangle| < \frac{\epsilon}{2}$.

Considérese pues que: $\| \|T\| - |\langle T_n \bar{x}', \bar{x}' \rangle| \leq \| \|T\| - \langle T_n \bar{x}', \bar{x}' \rangle \|$

$$\begin{aligned} &\leq \| \|T\| - \langle T\bar{x}', \bar{x}' \rangle + \langle T\bar{x}', \bar{x}' \rangle - \langle T_n \bar{x}', \bar{x}' \rangle \| \\ &\leq \| \|T\| - \langle T\bar{x}', \bar{x}' \rangle \| + |\langle T\bar{x}', \bar{x}' \rangle - \langle T_n \bar{x}', \bar{x}' \rangle| < \epsilon. \end{aligned}$$

Por lo que para toda $\epsilon > 0$ y para toda $n \geq N$ se tiene entonces que $\| \|T\| - |\langle T_n \bar{x}', \bar{x}' \rangle| < \epsilon$. Por lo cual: $\| \|T\| - \epsilon < \|T_n\|$ y dado que por definición $|\langle T_n \bar{x}', \bar{x}' \rangle| \leq \|T_n\|$, entonces se da que $\|T\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|$. \square

Lema 2.3.7: Sea G una gráfica localmente finita, dadas H y H' gráficas finitas, tales que H' es la subgráfica inducida de G con los mismos vértices que H . Entonces $r(H) \leq r(H')$.

2. El operador de Adyacencia

Demostración: Se considerarán $A(H)$ y $A(H')$, los operadores de adyacencia de H y H' , como los inducidos sobre $\ell_2(V(G))$, donde si el vértice i no pertenece a $V = V(H) = V(H')$ entonces las entradas $A_{ij}(H)$ y $A_{ij}(H')$ serán cero, para toda $v_j \in V$.

Sea n en \mathbb{N} , considerando como está definido el producto interior se tiene que :

$$|\langle A(H)^n x, x \rangle| \leq \sum_{u \in V} \sum_{v \in V} |a_{u,v}| |x_u| |x_v| = \sum_{u \in V} \sum_{v \in V} a_{u,v} |x_v| |x_u|,$$

pero, se tiene que $a_{u,v}$ y $a'_{u,v}$ son las entradas de las matrices que representan a los operadores $A(H)^n$ y $A(H')^n$ respectivamente; en la posición indexada sobre el vértice u y el vértice v de las gráficas H y H' , en ese orden.

Como la matriz de una composición de operadores, se obtiene multiplicando en orden las matrices de cada operador, se tiene que $a_{u,v}$ y $a'_{u,v}$ son combinaciones de sumas y productos de las entradas de las matrices iniciales que representaban a los operadores $A(H)$ y $A(H')$. Dado que son dos matrices del mismo tamaño indexadas sobre el mismo conjunto de vértices, el resultado de multiplicar n veces las matrices consigo mismas, va a arrojar combinaciones lineales de entradas con los mismos índices, con los respectivos valores de cada matriz. Como para toda i, j en $\{1, \dots, n(G)\}$ se tiene que $A(H)_{ij} \leq A(H')_{ij}$, entonces:

$$\sum_{u \in V} \sum_{v \in V} a_{u,v} |x_v| |x_u| \leq \sum_{u \in V} \sum_{v \in V} a'_{u,v} |x_v| |x_u| = |\langle A(H')^n y, y \rangle|,$$

con $y = \{|x_u|\}_{u \in V}$, al ser x un vector unitario y también lo es.

Se tiene entonces que:

$$|\langle A(H')^n y, y \rangle| \leq \sup_{z \in \ell_2(V), \|z\|=1} |\langle A(H')^n z, z \rangle|.$$

Tomando el supremo del conjunto de las x de norma uno, se preserva la desigualdad:

$$\sup_{x \in \ell_2(V), \|x\|=1} |\langle A(H)^n x, x \rangle| \leq \sup_{z \in \ell_2(V), \|z\|=1} |\langle A(H')^n z, z \rangle|.$$

Entonces:

$$\|A(H)^n\| \leq \|A(H')^n\|.$$

Por lo cual:

2.3. Convergencia en Gráficas y su Asociación con la Convergencia de Operadores

$$\|A(H)^n\| \leq \|A(H')^n\| \text{ para cualquier } n \in \mathbb{N}.$$

Por ser números positivos, también se tiene que $\|A(H)^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|A(H')^n\|^{\frac{1}{n}}$. Por la monotonía del límite (y porque ambos límites convergen pues son gráficas localmente finitas y su radio espectral está definido) :

$$r(H) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A(H)^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|A(H')^n\|^{\frac{1}{n}} = r(H')$$

De lo que se concluye que $r(H) \leq r(H')$. \square

La siguiente proposición permite establecer una relación entre la convergencia de una sucesión de gráficas y la convergencia de sus radios espectrales:

Proposición 2.3.8: Sea G una gráfica localmente finita. Sea H_1, H_2, \dots una sucesión de subgráficas de G , que converge a G . Entonces el radio espectral de G está dado por $r(G) = \lim_{n \rightarrow \infty} r(H_n)$.

Demostración: Sea H una subgráfica finita de G , y sea H' la subgráfica inducida de G con los mismos vértices que H .

Ahora, sea \bar{x}' un vector de norma uno, asociado al eigenvalor $\lambda = r(H')$ y sea \bar{x} el encaje de \bar{x}' en $\ell_2(V)$.

Entonces se tiene que:

$$r(G) = \|A\| \geq \|A\bar{x}\| \|\bar{x}\| \geq \|A\bar{x}\| = \|A(H')\bar{x}'\| = r(H') \geq r(H).$$

La primera de estas igualdades se da por el teorema espectral, el A.11, considerando el álgebra C^* generada por el operador A , pues hay una isometría entre el álgebra C^* generada y el espectro del operador A . Convirtiéndose la norma de A en el supremo del conjunto de $|\lambda|$ tal que λ es un complejo que pertenece al espectro del operador A , es decir al espectro de G . Pero esa es la definición de radio espectral.

Primer paso: se prueba para cualquier subgráfica finita de G .

Si H_1, H_2, \dots son gráficas finitas, por lo anterior, para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $r(G) \geq r(H_n)$.

Por lo cual:

$$r(G) \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} \{r(H_n)\} \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} r(H_n).$$

Como en el caso finito se cumple $r(H_n) = \|A_n\|$ se tiene que:

2. El operador de Adyacencia

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} r(H_n) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|A_n\|.$$

Por esto y por la igualdad al inicio de esta prueba:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|A_n\| = \liminf_{n \rightarrow \infty} r(H_n) \geq \|A\|.$$

Cumplíendose la última desigualdad por el lema 2.3.6.

Se concluye así el primer paso.

Además, se tiene que $r(G) = \sup\{r(H) : H \text{ es finita}\}$; puesto que siempre es posible escoger una sucesión de gráficas finitas que converja a G (recordando la definición de convergencia en gráficas).

Ahora, si dado n en \mathbb{N} , H_n no es finita, cualquier subgráfica finita de H_n lo es también de G . Por ello, se tiene que $r(H_n) \leq r(G)$. Como esto se cumple para toda n en \mathbb{N} , se tiene que por la monotonía del límite superior que:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} r(H_n) \leq r(G).$$

Pero del desarrollo anterior se obtiene lo siguiente:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} r(H_n) \leq r(G) \leq \|A\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|A_n\| = \liminf_{n \rightarrow \infty} r(H_n).$$

Lo que concluye la prueba. \square

2.3. Convergencia en Gráficas y su Asociación con la Convergencia de Operadores

Capítulo 3

Productos de Gráficas

Teniendo el universo de las gráficas, es posible definir operaciones entre ellas, una de las maneras de llevar esto a cabo es mediante los llamados productos de gráficas. Los primeros tres tipos de productos mencionados en este capítulo, son considerados productos fundamentales de gráficas, posiblemente por la considerable cantidad de aplicaciones que de ellos se derivan, pero también, porque cumplen, como operaciones binarias entre objetos, propiedades tales como asociatividad y conmutatividad.

Se abordará cada uno de estos productos desde el punto de vista de la teoría de gráficas, pero también, observando la relación existente entre cada producto y su espacio de Hilbert asociado, además del método para obtener el operador de adyacencia de las nuevas gráficas producto basándose en los operadores de adyacencia de las gráficas factor.

En lo sucesivo, aún si llega a omitirse el vocablo, todas las gráficas consideradas serán localmente finitas y simples.

3.1. El Producto Directo

El producto directo también llamado tensorial, se define de la siguiente manera: dadas dos gráficas (G_1, V_1) y (G_2, V_2) , el **producto directo** de G_1 y G_2 es la gráfica cuyo conjunto de vértices es $V_1 \times V_2$, la relación de adyacencia de esta gráfica se establece de la siguiente manera: dados u_1, u_2 en V_1 y w_1, w_2 en V_2 , $(u_1, w_1)(u_2, w_2)$ serán adyacentes si y sólo si $u_1 u_2$ pertenece a $E(G_1)$ y $w_1 w_2$ pertenece a $E(G_2)$.

Antes de introducir la notación para este producto consideremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.1.1: Sea $G_1 = G_2 = K_2$.

La representación gráfica de $G_1 \times G_2 = K_2 \times K_2$ es la siguiente:

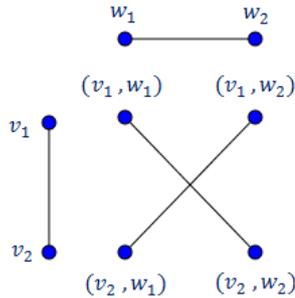


Figura 3.1: Producto tensorial de K_2 consigo misma

Como puede observarse en la figura anterior, una manera sencilla de representar pictóricamente el producto tensorial de dos gráficas finitas, consiste en trazar en una cuadrícula el producto cartesiano de los conjuntos de vértices, acomodando la una en vertical y trazar posteriormente las aristas correspondientes.

La gráfica obtenida al realizar el producto tensorial de K_2 consigo misma, asemeja una \times por lo cual el producto directo de G_1 con G_2 se denota $G_1 \times G_2$. [23]

Es importante notar, que nada en la definición restringe el producto directo a gráficas finitas. Cabe mencionar, que no debe confundirse la notación del producto directo con la notación del producto cartesiano, la cual se trabajará mas adelante.

3.1.1. El Operador de Adyacencia del Producto Tensorial

Una duda natural, sería preguntarse por la relación existente entre el vocablo tensorial en el nombre alternativo del producto directo, y los objetos matemáticos denominados tensores. Esta duda quedará aclarada con las siguientes proposiciones, cuya directa relación con el contenido del Apéndice C, invita a retomar la lectura del capítulo después de leer dicho apéndice.

3. Productos de Gráficas

Antes de continuar, es necesario introducir una definición:

Definición 3.1.1.1: Dadas dos matrices A y B finitas, el producto de Kronecker de A con B , denotado $A \otimes B$ se define como:

$$[A \otimes B] = \begin{pmatrix} a_{11}\mathbf{B} & \dots & a_{1n}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & \dots & a_{2n}\mathbf{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}\mathbf{B} & \dots & a_{nn}\mathbf{B} \end{pmatrix}$$

Si A indexada sobre $I \times I$ y B con el conjunto de índices $K \times K$, no son finitas, se define el producto de Kronecker de A con B como la matriz $A \otimes B$ indexada sobre $(I \times K) \times (I \times K)$ cuyas entradas se describen de la siguiente manera: $(A \otimes B)_{(i,j)(k,l)} = A_{ik}B_{jl}$. Es claro que en el caso finito ambas definiciones coinciden.

Se busca representar el operador de adyacencia en términos del producto tensorial de los operadores de adyacencia de cada gráfica. Sin embargo, hasta ahora sólo se ha hablado del producto de Kronecker entre dos matrices, el objetivo es probar que el operador de adyacencia del producto directo de dos gráficas es el producto tensorial entre los operadores de adyacencia de cada una de las gráficas. El producto tensorial de los operadores se define formalmente en el apéndice C, donde además se justifica su existencia y su relación directa con el producto de Kronecker de matrices.

Proposición 3.1.1.2: Dados V_1 y V_2 conjuntos discretos, se tiene que:

$$\ell_2(V_1) \otimes \ell_2(V_2) \cong \ell_2(V_1 \times V_2)$$

Demostración: Se probará que existe $\phi : \ell_2(V_1) \otimes \ell_2(V_2) \longrightarrow \ell_2(V_1 \times V_2)$, lineal y unitaria.

Se escogerá una base ortonormal $\{\delta_{e_i^1}\}_{e_i^1 \in V_1}$ de $\ell_2(V_1)$, de la misma forma $\{\delta_{e_j^2}\}_{e_j^2 \in V_2}$ una base ortonormal de $\ell_2(V_2)$.

Tomando en cuenta que $\ell_2(V_1) \otimes \ell_2(V_2)$ es el producto tensorial de $\ell_2(V_1)$ y $\ell_2(V_2)$, se considera la función $\psi : \ell_2(V_1) \times \ell_2(V_2) \longrightarrow \ell_2(V_1 \times V_2)$ definida como $\psi(\delta_{e_i^1}, \delta_{e_j^2}) = \delta_{(e_i^1, e_j^2)}$ que es bilineal. Usando la propiedad universal del producto tensorial, incluida en el apéndice C, se tiene que existe:

$$\phi : \ell_2(V_1) \otimes \ell_2(V_2) \rightarrow \ell_2(V_1 \times V_2)$$

lineal, que cumple :

$$\phi(\delta e_i^1 \otimes \delta e_j^2) = \delta(e_i^1, e_j^2).$$

Además, por como está definido el producto tensorial entre espacios de Hilbert, el conjunto $\{\delta e_i^1 \otimes \delta e_j^2 | e_i^1 \in V_1, e_j^2 \in V_2\}$ también es una base ortonormal del espacio de Hilbert $\ell_2(V_1) \otimes \ell_2(V_2)$. Ahora se probará que ϕ es unitaria, para ello hay que ver que es una isometría y que es suprayectiva.

$$\text{Sea } W = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta e_i^1 \otimes \delta e_j^2 \mid n \in \mathbb{N}, e_i^1 \in V_1, e_j^2 \in V_2, \lambda_i \in \mathbb{C} \right\}$$

Se tiene por linealidad que:

$$\|\phi(x)\| = \left\| \phi\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \delta e_j^1 \otimes \delta e_j^2\right) \right\| = \left\| \sum_{j=1}^n \alpha_j \phi(\delta e_j^1 \otimes \delta e_j^2) \right\| = \left\| \sum_{j=1}^n \alpha_j \delta(e_j^1, e_j^2) \right\|.$$

Por el teorema de Pitágoras generalizado:

$$\left\| \sum_{j=1}^n \alpha_j \delta(e_j^1, e_j^2) \right\|^2 = \sum_{j=1}^n \|\alpha_j \delta(e_j^1, e_j^2)\|^2 = \sum_{j=1}^n |\alpha_j|^2 \|\delta(e_j^1, e_j^2)\|^2 = \sum_{j=1}^n |\alpha_j|^2 = \|x\|^2.$$

Como W es un conjunto denso, se sigue que ϕ es una isometría.

$$\text{Sea } V = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta(e_i^1, e_i^2) \mid n \in \mathbb{N}, e_i^1 \in V_1, e_i^2 \in V_2, \lambda_i \in \mathbb{C} \right\}.$$

Primero se probará la suprayectividad de ϕ en V , dado v en V , considérese a

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta(e_i^1, e_i^2), \text{ sea } w = \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta e_i^1 \otimes \delta e_i^2 \text{ en } \ell_2(V_1) \otimes \ell_2(V_2),$$

obsérvese que:

$$\phi(w) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi(\delta e_i^1 \otimes \delta e_i^2) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta(e_i^1, e_i^2) = v.$$

Por lo cual ϕ es suprayectiva en V .

Ahora sea $\bar{x} \in \ell_2(V_1 \times V_2)$. Como V es denso $\ell_2(V_1 \times V_2)$, existe una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ contenida en V que converge a x . Para cada n en \mathbb{N} se tiene por la suprayectividad de ϕ en V que existe y_n en W , tal que $\phi(y_n) = x_n$. Ahora $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy pues $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy, y dada $\epsilon > 0$, existe una M en \mathbb{N} tal que si $n, m > M$ entonces:

$$\epsilon > \|x_n - x_m\| = \|\phi(y_n) - \phi(y_m)\| = \|\phi(y_n - y_m)\| = \|y_n - y_m\|,$$

además la sucesión está en $\ell_2(V_1) \otimes \ell_2(V_2)$ que es un espacio completo, por lo cual la sucesión converge a un y en $\ell_2(V_1) \otimes \ell_2(V_2)$, como ϕ es lineal y continua, se tiene que $\phi(y) = x$, entonces ϕ es suprayectiva.

Por lo tanto ϕ es unitaria. \square

3. Productos de Gráficas

Dadas dos gráficas localmente finitas G_1 y G_2 , es necesario ahora hallar el operador de adyacencia de $G_1 \times G_2$, que inicialmente actuaría en $\ell_2(V_1 \times V_2)$.

Proposición 3.1.1.3: Sean G_1 y G_2 localmente finitas, entonces la matriz asociada al operador de adyacencia de la gráfica $G_1 \times G_2$ coincide, salvo un cambio de base, con la matriz asociada al operador $A(G_1) \otimes A(G_2)$.

Demostración: Sean $V_1 = \{v_1, v_2, v_3, \dots\}$ y $V_2 = \{w_1, w_2, w_3, \dots\}$ los conjuntos de vértices de G_1 y G_2 respectivamente.

Se considerará la entrada $(v_i, w_j)(v_k, w_l)$ de la matriz $A(G_1) \otimes A(G_2)$.

Como esta matriz es un producto de Kronecker se tiene que esa entrada es de la forma $A(G_1)_{v_i v_k} A(G_2)_{w_j w_l}$. Por lo que sólo será uno si ambas son uno. Lo que nos indica que si $v_i v_k$ pertenece a $E(G_1)$ y $w_j w_l$ pertenece a $E(G_2)$ entonces $(v_i, w_j)(v_k, w_l)$ pertenece a $E(G_1 \times G_2)$. Esto para cualquier entrada por lo que las matrices asociadas a los operadores $A(G_1) \otimes A(G_2)$ y $A(G_1 \times G_2)$ coinciden. No basta esto, sin embargo, para afirmar que es el mismo operador puesto que los espacios en que actúan son distintos, pero por la proposición anterior, dichos espacios son isomorfos, por lo que son iguales salvo un cambio de base. \square

3.1.2. El Espectro del Producto Directo

En el capítulo anterior se consideró la relación del espectro de dos gráficas en comparación con las relaciones ya existentes entre ellas. Por ejemplo, se abordó la conexión entre el espectro de una gráfica, y el espectro de sus componentes conexas.

Pero ahora es momento de analizar la relación entre el espectro del producto directo de dos gráficas y el espectro de sus factores.

Antes, es necesario probar lo siguiente:

Proposición 3.1.2.1: Dado T un operador acotado en un espacio de Hilbert H , si $R(T)$ es denso y $0 < M = \inf_{x \in H, \|x\|=1} \|T(x)\|$, entonces T es invertible.

Demostración: Como $M > 0$ se tiene $\|T(x)\| \geq M\|x\|$ por lo que si $\|T(x)\|$ es cero entonces $\|x\|$ es cero y x es el elemento cero de H y T es inyectiva. Como también $R(T)$ es denso, dado y en H , existe una sucesión $\{T(x)_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que converge a y . Por otro lado la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy, pues dada $\epsilon > 0$, existe una N en \mathbb{N} tal que si $n, m > N$ entonces $\epsilon > \|T(x)_n - T(x)_m\| > \|x_n - x_m\|$ con $r > 0$; además la sucesión está en H que es completo, por lo que converge

3.1. El Producto Directo

a una x en H . Por la continuidad de T , $T(x) = y$. Por lo tanto T es también suprayectiva, de lo cual T es biyectiva, por lo que es invertible. \square .

Las siguientes definiciones y lemas son necesarios para la prueba del Teorema 3.1.2.6.

Definición 3.1.2.2: Dado T un operador lineal en un espacio de Hilbert H , se define $\pi(T)$ como el espectro aproximado del operador T . Es decir el conjunto de todos aquellos λ en \mathbb{C} tal que $\inf_{u \in H, \|u\|=1} \|(T - \lambda I)u\| = 0$. Definimos $\phi(T)$ como $\sigma(T) \setminus \pi(T)$.

Lema 3.1.2.3: Dado T un operador lineal en H , el conjunto $\pi(T)$ es cerrado.

Demostración: Sea $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión contenida en $\pi(T)$, convergente a x en \mathbb{C} . Como para toda k en \mathbb{N} , se tiene que $\inf_{u \in H, \|u\|=1} \|(T - x_k I)u\| = 0$, entonces $\inf_{u \in H, \|u\|=1} \|(T - xI)u\| = 0$ por lo que x pertenece a $\pi(T)$. \square

Proposición 3.1.2.4: Dado T como en la proposición anterior, el conjunto $\phi(T)$ es abierto.

Demostración: Sea μ en $\phi(T)$, entonces μ no está en $\pi(T)$.

Por lo cual $\inf_{u \in H, \|u\|=1} \|(T - \mu I)u\| = r > 0$ y dado λ en \mathbb{R} tal que $|\lambda - \mu| < \frac{r}{2}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \|(T - \mu I)u\| &= \|(T - (\lambda - \lambda + \mu)I)u\| = \|(T - \lambda I)u + (-\lambda + \mu)I(u)\| \\ &\leq \|(T - \lambda I)u\| + |-\lambda + \mu|. \end{aligned}$$

Luego,

$$\inf_{u \in H, \|u\|=1} \|(T - \mu I)u\| \leq \inf_{u \in H, \|u\|=1} \|(T - \lambda I)u\| + |-\lambda + \mu|.$$

De lo cual:

$$r < \inf_{u \in H, \|u\|=1} \|(T - \lambda I)u\| + \frac{r}{2}.$$

Por lo que:

$$\frac{r}{2} < \inf_{u \in H, \|u\|=1} \|(T - \lambda I)u\|.$$

Se concluye por lo tanto que λ pertenece a $\phi(T)$, por lo que $\phi(T)$ es abierto. \square

3. Productos de Gráficas

Lema 3.1.2.5: Dado T un operador lineal acotado en un espacio de Hilbert H , si λ pertenece a $\phi(T)$ entonces $\bar{\lambda}$ es un eigenvalor de T^* .

Demostración: Si $\bar{\lambda}$ no es un eigenvalor de T^* , entonces:

$$\inf_{u \in H, \|u\|=1} \|(T^* - \bar{\lambda}I)u\| = c > 0.$$

Lo cual indica que el único elemento que va a dar a cero, bajo el operador es el elemento cero. También $T - \lambda I$ es acotado, pues T e I lo son, su rango además es denso pues se tiene que $R(T - \lambda I) = N((T - \lambda I)^*)^\perp = N(T^* - \bar{\lambda}I) = 0$. Por la proposición 3.1.2.1, $T - \lambda I$ es invertible. Por lo que λ no pertenece a $\sigma(T)$, ni a $\phi(T)$. \square

Ahora que están completos los preliminares, se probará:

Teorema 3.1.2.6: Dados dos espacios de Hilbert H_1, H_2 , un operador acotado T en el espacio de Hilbert H_1 y un operador acotado S en el espacio de Hilbert H_2 . Se tiene que $\sigma(T \otimes S) = \sigma(T)\sigma(S)$.

Demostración: La prueba se hará por doble contención:

Sea λ en $\sigma(T \otimes S)$, considerando el isomorfismo dado por el teorema espectral, hay una correspondencia entre las funcionales lineales multiplicativas que actúan sobre el operador; y los elementos del espectro del operador.

Sea Φ la funcional lineal multiplicativa asociada a λ . Obsérvese que:

$\Phi(T \otimes S) = \Phi((T \otimes I_2)(I_1 \otimes S))$ donde I_1 e I_2 son las identidades de H_1 y H_2 respectivamente, como Φ es multiplicativa se tiene que:

$$\Phi(T \otimes I_2)(I_1 \otimes S) = \Phi(T \otimes I_2)\Phi(I_1 \otimes S).$$

Se define a Φ_1 como una función tal que $\Phi_1(T) = \Phi(T \otimes I_2)$. De forma análoga se define a Φ_2 como $\Phi_2(S) = \Phi(I_1 \otimes S)$.

De lo cual: $\Phi(T \otimes I_2)\Phi(I_1 \otimes S) = \Phi_1(T)\Phi_2(S)$. A su vez, Φ_1 y Φ_2 pueden ser vistas como elementos del espectro de T y S , λ_1 y λ_2 respectivamente, por lo que $\lambda = \lambda_1\lambda_2$, entonces λ pertenece a $\sigma(T)\sigma(S)$.

La segunda contención se hará por casos, basandose en una prueba de [9]:

Primer caso: Si α pertenece a $\pi(S)$ y β a $\pi(T)$, entonces existen sucesiones unitarias $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en H tal que $(T - \alpha I)u_n$ y $(S - \beta I)v_n$ tienden a

cero.

Pero entonces:

$$\begin{aligned} [T \otimes S - \alpha\beta(I_1 \otimes I_2)(u_n \otimes v_n)] &= [(T - \alpha I_1 \otimes S) + (\alpha I_1 \otimes (S - \beta I_2))(u_n \otimes v_n)] \\ &= (T - \alpha I_1)u_n \otimes \beta v_n + \alpha u_n \otimes (S - \beta I_2)v_n, \end{aligned}$$

esta suma tiende a cero cuando k tiende a infinito, entonces $\alpha\beta$ pertenece a $\pi(T \otimes S)$, por lo que $\alpha\beta$ está en $\sigma(T \otimes S)$.

Segundo caso: Si α pertenece a $\phi(T)$ y β está en $\phi(S)$, se tiene entonces por el lema 3.1.2.5 que $\bar{\alpha}$ está en $\pi(T^*)$ y que $\bar{\beta}$ pertenece a $\pi(S^*)$, entonces por el primer caso, $\bar{\alpha}\bar{\beta}$ pertenece a $\sigma(T^* \otimes S^*) = \sigma((T \otimes S)^*)$; por lo que $\bar{\alpha}\bar{\beta}$ es un elemento de $\sigma(T \otimes S)$.

Tercer caso: Hay dos subcasos: α en $\pi(T)$ y β en $\phi(S)$ o que α esté en $\phi(T)$ y β en $\pi(S)$, se probará el primero de estos y el segundo es completamente análogo. Así pues, supóngase que α es cero, sea β_0 un elemento de $\pi(S)$, como en el primer caso $\alpha\beta_0$ pertenece a $\sigma(T \otimes S)$, aunque sin importar quien sea β como α es cero, $\alpha\beta_0 = \alpha\beta = 0$, por lo que $\alpha\beta$ pertenece a $\sigma(T \otimes S)$, por ello, se supondrá a α distinto de cero: de forma similar se podría tomar cualquier elemento α_0 de $\phi(T)$ y por el segundo caso $\alpha_0\beta$ pertenece a $\sigma(T \otimes S)$, también por ser $\beta = 0$ $\alpha\beta = 0 = \alpha_0\beta$. Por lo que se supondrá que α y β son distintos de cero.

Como β pertenece a $\phi(S)$ entonces $\bar{\beta}$ es un elemento de $\pi(S^*)$, también al estar α en $\pi(T)$, α es elemento de $\sigma(S)$, por lo que $\bar{\alpha}$ es elemento de $\sigma(T^*)$. Si $\bar{\alpha}$ pertenece a $\pi(S^*)$ como por el lema 3.1.2.5, $\bar{\beta}$ está en $\pi(T^*)$, por el primer caso $\bar{\alpha}\bar{\beta}$ pertenece a $\sigma(T^* \otimes S^*)$ y entonces $\alpha\beta$ está en $\sigma(T \otimes S)$. Por otra parte, si $\bar{\alpha}$ pertenece a $\phi(T^*)$, se tomará t en $[1, \infty]$ y se considerarán pares de la forma $[t\bar{\alpha}, \frac{\beta}{t}]$; como por la proposición 3.1.2.4 $\phi(T^*)$ y $\phi(S)$ son abiertos, existe una t_1 mayor que 1 y lo suficientemente cercana a 1, tal que $t_1\alpha$ pertenece a $\phi(T^*)$ y $\frac{\beta}{t_1}$ está en $\phi(S)$ y si $1 < t < t_1$ y $t\alpha$ está en $\sigma(T)$, entonces $t\alpha$ es elemento de $\phi(T^*)$ y $\frac{\beta}{t}$ de $\phi(S)$. Si acaso $t_1\alpha$ está en $\pi(T^*)$ pero $\frac{\beta}{t_1}$ está en $\phi(S)$ entonces $\frac{\bar{\beta}}{t_1}$ pertenece a $\pi(S^*)$. Por el primer caso $\bar{\alpha}\bar{\beta} = t_1\alpha\frac{\bar{\beta}}{t_1}$ pertenece a $\sigma(T^* \otimes S^*) = \sigma((T \otimes S)^*)$, por lo cual $\alpha\beta$ está en $\sigma(T \otimes S)$.

Si por otro lado $t_1\bar{\alpha}$ pertenece a $\phi(T^*)$ y $\frac{\beta}{t_1}$ a $\pi(S)$, se tiene que $t_1\alpha$ está en $\pi(T)$, de nuevo por el primer caso $\alpha\beta$ pertenece a $\sigma(T \otimes S)$. El último subcaso a considerar es que $t_1\bar{\alpha}$ pertenezca a $\pi(T^*)$ y $\frac{\beta}{t_1}$ a $\pi(S)$. Para ello, considérese a t_n una sucesión de números reales que satisfacen $1 < t_n < t_1$ y que $t_n\alpha$ pertenece a $\sigma(T)$ tales que t_n tiende a t_1 . Para todo n en \mathbb{N} , se tiene que $t_n\alpha$ pertenece

3. Productos de Gráficas

a $\phi(T^*)$, por el lema, $t_n\alpha$ está en $\pi(T)$ y del primer caso $\alpha\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n\alpha \frac{\bar{\beta}}{t_1}$ pertenece a $\sigma(T \otimes S)$.

A partir de todos los casos y subcasos anteriores, se concluye que si $\alpha\beta$ está en $\sigma(T)\sigma(S)$ entonces $\alpha\beta$ pertenece a $\sigma(T \otimes S)$. \square

Del teorema anterior se sigue de manera sencilla el siguiente corolario, considerando $T = A(G_1)$ y $S = A(G_2)$:

Corolario 3.1.2.7: Dadas dos gráficas localmente finitas G_1 y G_2 , se tiene que $\sigma(A(G_1) \otimes A(G_2)) = \sigma(A(G_1))\sigma(A(G_2))$.

Ejemplo 3.1.2.8: Un ejemplo finito Se considerará el producto directo de P_3 con K_4 , este puede realizarse con el método descrito en el Ejemplo 3.1.1, como se observa en la siguiente imagen:

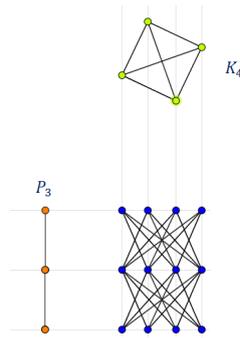


Figura 3.2: $P_3 \times K_4$

Reacomodando los vértices, esta gráfica tiene también la siguiente representación visual:

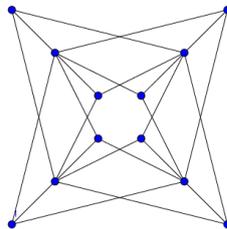


Figura 3.3: $P_3 \times K_4$

3.2. El Producto Cartesiano

Calcular el espectro de la gráfica producto no parece tan simple, como lo es, por otro lado, calcular el espectro de las gráficas factores.

Por los cálculos realizados en la sección 1.6.3 que $\sigma(K_4) = \{-1, 3\}$, donde -1 es un eigenvalor con multiplicidad tres.

También:

$$A(P_3) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Un sencillo cálculo muestra que el conjunto de eigenvalores de $A(P_3)$, es decir $\sigma(P_3)$, es el conjunto $\{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$.

Por la proposición anterior, se tiene que:

$$\sigma(P_3 \times K_4) = \sigma(P_3)\sigma(K_4)$$

Pero este producto de conjuntos de manera explícita es:

$$\sigma(P_3)\sigma(K_4) = \{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, -\sqrt{2}\},$$

donde la multiplicidad del valor propio 0 es 4, y la de los valores propios $\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, -\sqrt{2}$ es 3, 3, 1 y 1 respectivamente.

3.2. El Producto Cartesiano

El producto cartesiano se define a continuación: dadas dos gráficas G_1 y G_2 , con conjuntos de vértices V_1 y V_2 respectivamente, el **producto cartesiano** de G_1 y con G_2 es la gráfica cuyo conjunto de vértices es $V_1 \times V_2$, la relación de adyacencia queda determinada de la forma siguiente: si u_1, u_2 están en V_1 y w_1, w_2 en V_2 entonces los vértices $(u_1, w_1)(u_2, w_2)$ son adyacentes si y sólo si $u_1 = u_2$ y $w_1 w_2$ pertenece a $E(G_2)$ o $w_1 = w_2$ y $u_1 u_2$ pertenece a $E(G_1)$.

De nuevo, antes de definir la notación, obsérvese el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.2.1: Se considerará el producto cartesiano de K_2 con K_2 .

Tal como en el caso del producto directo, la notación del producto cartesiano tiene su origen en la representación pictórica del producto de este ejemplo.

Por lo cual, dadas G_1 y G_2 gráficas, se denotará a su producto cartesiano como $G_1 \square G_2$.

3. Productos de Gráficas

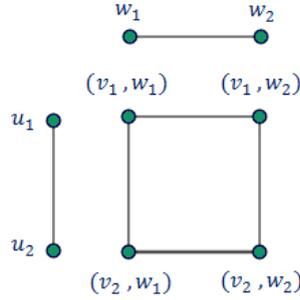


Figura 3.4: Producto cartesiano de K_2 consigo misma

3.2.1. El Operador de Adyacencia del Producto Cartesiano

Ahora se analizará el comportamiento del operador de adyacencia del producto cartesiano. Como el conjunto de vértices es el mismo que en el producto directo, el operador de adyacencia actuará sobre $\ell_2(V_1 \times V_2)$. Por la proposición 3.1.4 se sabe que es posible considerar el operador de adyacencia con un cambio de base para poder trabajar en $\ell_2(V_1) \otimes \ell_2(V_2)$.

Proposición 3.2.1.1: Dadas G_1 y G_2 gráficas localmente finitas y simples, cuyos conjuntos de vértices son V_1 y V_2 respectivamente; se tiene que los operadores $A(G_1 \square G_2)$ y $A(G_1) \otimes I_2 + I_1 \otimes A(G_2)$ son iguales, salvo por el cambio de base mencionado en 3.1.1.2

Demostración: Se comprobará que entrada a entrada las matrices que caracterizan a los operadores son idénticas, por lo cual los operadores son iguales, actuando sobre $\ell_2(V_1) \otimes \ell_2(V_2)$.

Sean v_1, v_2 en V_1 y w_1, w_2 en V_2 . Si la entrada $(v_1, w_1)(v_2, w_2)$ de la matriz asociada a $A(G_1 \square G_2)$ es 1, entonces los vértices (v_1, w_1) y (v_2, w_2) son adyacentes, por la definición de producto cartesiano esto querría decir que $v_1 = v_2$ y w_1 es adyacente a w_2 en la gráfica G_2 o que $w_1 = w_2$ y $v_1 v_2$ pertenece a $E(G_1)$. Se analizaran por separado estos dos casos, dado que esta disyunción es excluyente, pues de darse ambos casos: $(v_1, w_1) = (v_2, w_2)$ y v_1 y w_1 serían adyacentes a sí mismos, situación imposible debido a la simplicidad de G_1 y G_2 . Retomando los dos casos separados: En el primero como $v_1 = v_2$ y $w_1 w_2$ pertenece a $E(G_2)$ se tiene que la entrada $(v_1, w_1)(v_2, w_2)$ de $I_1 \otimes A(G_2)$ es en realidad el producto de

3.2. El Producto Cartesiano

la entrada v_1v_2 , que es lo mismo que la entrada v_1v_1 de la matriz identidad que es uno; y la entrada w_1w_2 de la matriz asociada a $A(G_2)$ que por la adyacencia entre esos vértices también es uno.

Por lo cual la entrada $(v_1, w_1)(v_2, w_2)$ de $I_1 \otimes A(G_2)$ es uno. Es importante notar también que la entrada $(v_1, w_1) = (v_2, w_2)$ de $A(G_1) \otimes I_2$ es cero pues dicha entrada es el producto de la entrada w_1w_2 de la matriz identidad de $\ell_2(V_2)$ y la entrada v_1v_2 de la matriz asociada a $A(G_1)$, pero como $w_1 \neq w_2$ este producto es cero. Por lo cual la entrada $(v_1, w_1) = (v_2, w_2)$ de $A(G_1) \otimes I_2 + I_1 \otimes A(G_2)$ es uno.

El segundo caso es análogo.

Por otro lado, si los vértices (v_1, w_1) y (v_2, w_2) no son adyacentes, se tiene la negación de la definición y por lo tanto cuatro casos:

Primer caso: $v_1 \neq v_2$ y $w_1 \neq w_2$, al suceder eso las entradas v_1v_2 y w_1w_2 de I_1 e I_2 respectivamente, serán cero, por ende la entrada $(v_1, w_1)(v_2, w_2)$ de $A(G_1) \otimes I_2 + I_1 \otimes A(G_2)$ es cero.

Segundo caso: $v_1 \neq v_2$ y w_1 no es adyacente a w_2 . La entrada v_1v_2 de I_1 será entonces cero y la entrada w_1w_2 de $A(G_2)$ será cero. Por lo que la entrada $(v_1, w_1)(v_2, w_2)$ de $A(G_1) \otimes I_2 + I_1 \otimes A(G_2)$ será cero.

Tercer caso: El caso donde $w_1 \neq w_2$ y v_1 no es adyacente a v_2 , es completamente análogo al segundo.

Cuarto caso: Ni v_1 y v_2 ni w_1 y w_2 son adyacentes. En este caso la entrada v_1v_2 de $A(G_1)$ es cero y lo mismo la entrada w_1w_2 perteneciente a $A(G_2)$. Por lo cual será cero la entrada $(v_1, w_1)(v_2, w_2)$ de $A(G_1) \otimes I_2 + I_1 \otimes A(G_2)$.

Lo único que falta por ver es que si la entrada $(v_1, w_1)(v_2, w_2)$ de la matriz asociada al operador $A(G_1) \otimes I_2 + I_1 \otimes A(G_2)$ es uno o cero, entonces los vértices (v_1, w_1) y (v_2, w_2) son o no adyacentes, respectivamente.

Hay dos posibilidades:

Si la entrada $(v_1, w_1)(v_2, w_2)$ de $A(G_1) \otimes I_2 + I_1 \otimes A(G_2)$ es cero, esto quiere decir que la entrada $(v_1, w_1)(v_2, w_2)$ de las matrices asociadas a los operadores $A(G_1) \otimes I_2$ y $I_1 \otimes A(G_2)$ es cero en ambos casos, por lo que la entrada v_1v_2 de I_1 o de $A(G_1)$ es cero y también la entrada w_1w_2 de I_2 o de $A(G_2)$ es cero. En cualquier caso, no se cumplen las condiciones de adyacencia para los vértices (v_1, w_1) y (v_2, w_2) .

Si la entrada $(v_1, w_1)(v_2, w_2)$ de $A(G_1) \otimes I_2 + I_1 \otimes A(G_2)$ es uno, entonces esa entrada es uno en alguno de los operadores $A(G_1) \otimes I_2$ o $I_1 \otimes A(G_2)$, lo que indicaría que $w_1 = w_2$ y que v_1v_2 pertenece a $E(G_1)$ o que $v_1 = v_2$ y w_1w_2

3. Productos de Gráficas

pertenece a $E(G_2)$, por lo que los vértices (v_1, w_1) y (v_2, w_2) de $G_1 \square G_2$ son adyacentes.

Es importante notar que ninguna de las entradas de la matriz asociada al operador $A(G_1) \otimes I_2 + I_1 \otimes A(G_2)$ puede ser mayor que uno, pues las gráficas G_1 y G_2 son simples, por ello no sería posible que si una entrada de $A(G_1) \otimes I_2$ sea uno, la misma entrada en $I_1 \otimes A(G_2)$ también lo sea.

Por esto, es posible concluir que entrada a entrada los operadores $A(G_1) \square A(G_2)$ y $A(G_1) \otimes I_2 + I_1 \otimes A(G_2)$ coinciden. \square

3.2.2. El Espectro del Producto Cartesiano

El siguiente paso es establecer una relación entre el espectro del producto cartesiano de una gráfica y el espectro de las gráficas factor, sin embargo, para gráficas infinitas sólo se podrá establecer el siguiente resultado:

Proposición 3.2.2.1: Sean G_1 y G_2 , gráficas localmente finitas y simples, si $A(G_1)$ y $A(G_2)$ son sus operadores de adyacencia, se tiene que

$$\sigma(G_1 \square G_2) \subseteq \sigma(G_1) + \sigma(G_2).$$

Demostración: Sea $\lambda \in \sigma(G_1 \square G_2)$, por la proposición 3.2.1.1 esto es lo mismo que $\sigma(A(G_1) \otimes I_2 + I_1 \otimes A(G_2))$, por el teorema espectral existe una biyección entre las funcionales lineales multiplicativas que actúan sobre el operador y los elementos de su espectro. Sea pues γ la funcional lineal multiplicativa correspondiente a λ , por linealidad:

$$\gamma(A(G_1) \otimes I_2 + I_1 \otimes A(G_2)) = \gamma(A(G_1) \otimes I_2) + \gamma(I_1 \otimes A(G_2)).$$

Ahora se define γ_1 como la función tal que $\gamma_1(A(G_1)) = \gamma(A(G_1) \otimes I_2)$ y a γ_2 como la función tal que $\gamma_2(A(G_2)) = \gamma(I_1 \otimes A(G_2))$. Las cuales son funcionales lineales multiplicativas que actúan sobre el operador, por lo cual a γ_1 y a γ_2 , les corresponden por el teorema espectral unas λ_1 y λ_2 en $\sigma(G_1)$ y $\sigma(G_2)$ respectivamente. \square

Ejemplo 3.2.2.2: El mismo ejemplo finito, un nuevo producto Ahora se propondrá un ejemplo análogo al 3.1.2.8, usando los métodos de la sección anterior para representar pictóricamente el producto cartesiano entre P_3 y K_4 producto entre gráficas:

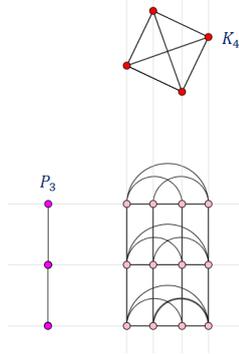


Figura 3.5: $P_3 \square K_4$

Reordenando los vértices, $P_3 \square K_4$ tiene la misma representación pictórica que:

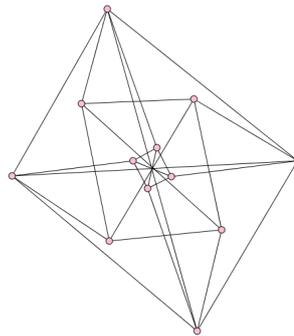


Figura 3.6: $P_3 \square K_4$

Del ejemplo 3.1.2.8 se sabe que $\sigma(P_3)$ es el conjunto $\{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$ y que $\sigma(K_4) = \{-1, 3\}$, donde -1 es un eigenvalor con multiplicidad tres.

Sea:

$$M = \{\lambda_1 + \lambda_2 \mid \lambda_1 \in \sigma(P_3), \lambda_2 \in \sigma(K_4)\} = \{-\sqrt{2}-1, -1, \sqrt{2}-1, 3-\sqrt{2}, 3, 3+\sqrt{2}\},$$

por la proposición 3.2.2.1 se tiene entonces que $\sigma(P_3 \square K_4) \subset M$, esto es lo único que se ha probado aquí hasta ahora; aunque en casos finitos, como este puede afirmarse que :

$$\sigma(G_1 \square G_2) = \sigma(G_1) + \sigma(G_2).$$

Una prueba de esto puede consultarse en [4].

A estas alturas, es posible realizar una observación, relacionada con el operador de adyacencia de $G_1 \square G_2$:

3. Productos de Gráficas

Proposición 3.2.2.3:

$$1 \quad (A(G_1) \otimes I_2)(I_1 \otimes A(G_2)) = (A(G_1) \otimes A(G_2)).$$

$$2 \quad A(G_1 \square G_2)^k = \sum_{s=0}^k \binom{s}{k} (A(G_1))^s \otimes (A(G_2))^{k-s}.$$

Demostración: Para probar 1, usando la proposición C.5 se tiene que:

$$\begin{aligned} (A(G_1) \otimes I_2)(I_1 \otimes A(G_2)) &= (A(G_1)I_1) \otimes (A(G_2)I_2) = (A(G_1) \otimes A(G_2)) \\ &= (I_1A(G_1)) \otimes (I_2A(G_2)) = (I_1 \otimes A(G_2))(A(G_1) \otimes I_2). \end{aligned}$$

La prueba de 2, se hará por inducción, la base $k = 1$ es inmediata de la proposición 3.2.1.1, sin embargo se probará el caso $k = 2$ por su utilidad en el resto de la prueba.

Si $k = 2$ se tiene por la proposición 3.2.1.1, que:

$$A(G_1 \square G_2)^2 = (A(G_1) \otimes I_2) + (I_1 \otimes A(G_2))^2.$$

Por como se define la composición de funciones, via multiplicación de matrices asociadas se tiene que

$$\begin{aligned} &((A(G_1) \otimes I_2) + (I_1 \otimes A(G_2)))(A(G_1) \otimes I_2) + (I_1 \otimes A(G_2))((A(G_1) \otimes I_2) + (I_1 \otimes A(G_2))) = \\ &((A(G_1) \otimes I_2)(A(G_1) \otimes I_2) + (A(G_1) \otimes I_2)(I_1 \otimes A(G_2))) + (I_1 \otimes A(G_2))(A(G_1) \otimes I_2) + \\ &((I_1 \otimes A(G_2))(I_1 \otimes A(G_2))). \end{aligned}$$

Por 1, se tiene que esto es igual a :

$$(A(G_1) \otimes I_2)^2 + 2(A(G_1) \otimes I_2)(I_1 \otimes A(G_2)) + (A(G_1) \otimes I_2)^2,$$

es decir

$$\sum_{s=0}^2 \binom{s}{2} (A(G_1) \otimes I_2)^s (I_1 \otimes A(G_2))^{2-s}.$$

Suponiendo válida la afirmación para $k = n$, es necesario probar su veracidad para $k = n + 1$. Si $k = n + 1$ se tiene que:

$$\begin{aligned} A(G_1 \square G_2)^{n+1} &= ((A(G_1) \otimes I_2) + (I_1 \otimes A(G_2)))^{n+1} \\ &= (A(G_1) \otimes I_2) + (I_1 \otimes A(G_2))^n (A(G_1) \otimes I_2) + (I_1 \otimes A(G_2)), \end{aligned}$$

por hipótesis de inducción se tiene que esto es:

$$\begin{aligned} & \sum_{s=0}^n \binom{s}{n} ((A(G_1) \otimes I_2)^s (I_1 \otimes A(G_2)))^{n-s} ((A(G_1) \otimes I_2) + (I_1 \otimes A(G_2))) \\ &= \sum_{s=0}^n \binom{s}{n} (A(G_1) \otimes I_2)^{s+1} (I_1 \otimes A(G_2))^{n-s} \\ &+ \sum_{s=0}^n \binom{s}{n} (A(G_1) \otimes I_2)^s (I_1 \otimes A(G_2))^{n+1-s}. \end{aligned}$$

Considerando en el primer sumando a $j = s + 1$ se tiene que esto es igual a:

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{j-1}{n} (A(G_1) \otimes I_2)^j (I_1 \otimes A(G_2))^{n+1-j} \\ &+ \sum_{s=0}^n \binom{s}{n} (A(G_1) \otimes I_2)^s (I_1 \otimes A(G_2))^{n+1-s}. \end{aligned}$$

Reacomodando, esto es igual a:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \binom{j-1}{n} (A(G_1) \otimes I_2)^j (I_1 \otimes A(G_2))^{n+1-j} \\ &+ \sum_{j=1}^n \binom{j}{n} ((A(G_1) \otimes I_2)^j (I_1 \otimes A(G_2))^{n+1-j}) + (A(G_1) \otimes I_2)^{n+1} + (I_1 \otimes A(G_2))^{n+1}. \end{aligned}$$

Lo cual dado que :

$$\binom{j-1}{n} + \binom{j}{n} = \binom{j}{n+1},$$

se convierte en:

$$\sum_{j=0}^{n+1} \binom{j}{n+1} (A(G_1) \otimes I_2)^j (I_1 \otimes A(G_2))^{n+1-j},$$

puesto que las identidades y los operadores conmutan e $I^l = I$ para toda l en los naturales, no es otra cosa que:

$$\sum_{j=0}^{n+1} \binom{j}{n+1} (A(G_1)^j \otimes I_2) (I_1 \otimes A(G_2))^{n+1-j},$$

pero por la proposición C.5, esto es lo mismo que:

$$\sum_{j=0}^{n+1} \binom{j}{n+1} (A(G_1)^j) \otimes (A(G_2))^{n+1-j},$$

que es lo que se quería demostrar. \square

En la siguiente sección se verá la utilidad de la observación anterior.

3.3. Distribuciones Espectrales

Como se pudo observar anteriormente, la relación entre el espectro del producto y los factores es más bien limitada en cuanto a información. Es por ello, que ahora es conveniente introducir la noción de distribución espectral.

Definición 3.3.1: Dados un espacio de Hilbert H , un operador $T : H \rightarrow H$ lineal, acotado y autoadjunto y $\phi : B(H) \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional lineal acotada. Una medida con signo μ se llama la **distribución** de T con respecto de ϕ si:

$$\phi(T^n) = \int_{\mathbb{R}} t^n d\mu(t) \quad (3.1)$$

para toda n en los naturales.

Recuérdese que una medida con signo es muy similar a una medida, cumpliendo las mismas condiciones de esta, con excepción de la de tomar sólo valores mayores o iguales que cero.

Es importante notar que como $\phi(T^0)$ es un real, resulta imperativo que $\mu(\mathbb{R})$ sea finito.

Si para todo S en $B(H)$ se cumple que $\phi(S^*S) \geq 0$ y $\phi(I) = 1$ se dice que ϕ es un estado.

Si ϕ es un estado, es necesario que μ sea una medida de probabilidad positiva, esto sólo quiere decir que para cualquier conjunto M en \mathbb{B} , $\mu(M) \geq 0$ y $\mu(\mathbb{R}) = 1$.

Garantizar de manera precisa la existencia de una medida μ que cumpla con las condiciones necesarias para ser una distribución, no es sencillo.

A continuación se justificará dicha existencia, sin embargo, el lector interesado en profundizar de manera más general en las deficiones o resultados que se mencionan, puede consultar [13], [15], [20] y [22].

Necesitan ser introducidos de manera breve conceptos tales como las medidas espectrales y resoluciones de la unidad, lo cual se hará a continuación:

Definición 3.3.2: Se dice que μ es una **medida espectral**, si es un homeomorfismo que va de un álgebra Booleana de conjuntos a un álgebra Booleana de proyecciones, con la propiedad adicional de que manda a la unidad del dominio al operador identidad en el rango, que además es σ -aditivo.

En este caso particular y contexto, esta definición se reduce a:

Se dirá que μ es una medida espectral si es un homeomorfismo que va de $B(\mathbb{C})$ a los operadores autoadjuntos e idempotentes en $\ell_2(V)$, que cumple las condiciones siguientes:

- $\mu(\mathbb{C}) = 1$
- Si M_k con k en \mathbb{N} es un colección de conjuntos disjuntos en $B(\mathbb{C})$ entonces:

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} M_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(M_k).$$

Definición 3.3.3: Dado T un operador en un espacio de Banach complejo y una medida espectral ν definida en los borelianos del plano, que satisface que $\nu(\delta)T = T\nu(\delta)$, donde el espectro de la restricción de T al eigenspacio asociado al conjunto δ está contenido en $\bar{\delta}$, se conoce como una **resolución de la identidad**.

Antes de continuar, se presenta como recordatorio el teorema de representación de Riesz, sin prueba, aunque existen distintas formulaciones, se tomará la versión de [36].

Teorema 3.3.4: Teorema de Representación de Riesz Dado H un espacio de Hilbert. Cada v en H induce un funcional lineal continuo en H , dado por $T_v(u) = \langle v, u \rangle$. Se tiene además que $\|T_v\| = \|v\|$ y que esta correspondencia de H en el espacio de funcionales lineales acotadas es biyectiva y antilineal.

Ahora se enunciará sin prueba un teorema que es una formulación distinta de el teorema espectral mencionado en A.11, la prueba de esta formulación tiene una extensión considerable y puede ser hallada en [15]:

Teorema 3.3.5 : Teorema espectral general Cada álgebra C^* conmutativa A de operadores en un espacio de Hilbert H es isométricamente equivalente al álgebra de las funciones continuas complejo valuadas $C(\Sigma)$, en el espectro de A , Σ y cada isomorfismo isométrico entre estas álgebras determina una única medida espectral μ definida en los borelianos de Σ . Esta medida cumple las siguientes propiedades:

3. Productos de Gráficas

- Para cada u, v en H , se tiene que la función $\langle \mu(\eta)u, v \rangle$, con η en los borelianos de Σ , es una función σ -aditiva.
- $\mu(\eta)T = T\mu(\eta)$, $\mu(\eta) = \mu(\eta)^*$, con η en los borelianos de Σ y T en A .
- $T(f) = \int_{\Sigma} f(\lambda)\mu(d\lambda)$, con f en $C(\Sigma)$.

Ahora se tratará de adaptar estos conceptos al contexto de la teoría espectral de gráficas.

Dada una gráfica G con conjuntos de vértices V , se sabe por la proposición 2.1.2 se sabe que el operador $A(G)$ es autoadjunto y actúa sobre el espacio de Hilbert $\ell_2(V)$ además se tiene que el conjunto $\sigma(G)$ pertenece a la σ -álgebra de Borel sobre \mathbb{C} . Dada f en $C(\sigma(G))$, por el teorema espectral general, existe entonces una función $\mu = \mu^A$ definida en los borelianos de $\sigma(G)$ tal que:

$$f(A(G)) = \int_{\sigma(G)} f(\lambda)\mu^A(d\lambda) \quad (3.2)$$

resultando ser μ por el teorema anterior, una resolución de la identidad.

Dados u, v en V , y considerando a e_u y e_v son los canónicos de $\ell_2(V)$, con índices u y v , se definen de forma implícita las siguientes funciones:

Primeramente:

$$\mu_{u,v}^A(d\lambda) = \langle \mu^A e_u, e_v \rangle.$$

También, la integral en (3.2) se definirá como:

$$\langle f(A(G))e_u, e_v \rangle.$$

Por el teorema de representación de Riesz, esto define un operador lineal acotado.

3.3.1. La Distribución de una Gráfica con Raíz

Recordando a las gráficas con raíz, abordadas en la sección 1.7, es posible reintroducir el concepto de estado en el contexto de la teoría de gráficas.

Definición 3.3.1.1: Dada una gráfica G , v_0 en $V(G)$ y δ_{v_0} en $\ell_2(V)$, se define la función: $\psi_{v_0} := \langle T(\delta_{v_0}), \delta_{v_0} \rangle$ para cualquier T en Δ , donde Δ es la cerradura bajo la norma de operadores del álgebra generada por $A(G)$ y la identidad.

Proposición 3.3.1.2: Así definida ψ_{v_0} cumple los siguientes:

- i) ψ_{v_0} es lineal;
- ii) ψ_{v_0} es acotada;
- iii) $\|\psi_{v_0}\| = 1$;
- iv) $\psi_{v_0}(S^*S) \geq 0$ para toda S en Δ y $\psi_{v_0}(I) = 1$.

Demostración: i) Sean S, T en Δ y λ en \mathbb{C} entonces

$$\psi_{v_0}(S + \lambda T) = \langle (S + \lambda T)\delta_{v_0}, \delta_{v_0} \rangle = \langle S(\delta_{v_0}) + \lambda T(\delta_{v_0}), \delta_{v_0} \rangle$$

Por linealidad del producto interior en la primera entrada esto último se convierte en:

$$\langle S(\delta_{v_0}), \delta_{v_0} \rangle + \lambda \langle T(\delta_{v_0}), \delta_{v_0} \rangle = \psi_{v_0}(S) + \lambda \psi_{v_0}(T).$$

ii) Como T es acotada existe $\|T\|$ y usando Cauchy-Schwarz :

$$|\psi_{v_0}(T)| = |\langle T(\delta_{v_0}), \delta_{v_0} \rangle| \leq \|T(\delta_{v_0})\| \|\delta_{v_0}\| \leq \|T\| \|\delta_{v_0}\| \|\delta_{v_0}\| = \|T\|.$$

iii) En particular si tomamos T como la identidad del espacio:

$$|\psi_{v_0}(I)| = |\langle I(\delta_{v_0}), \delta_{v_0} \rangle| = |\langle \delta_{v_0}, \delta_{v_0} \rangle| = 1 = 1\|I\|.$$

Por lo cual $\|\psi_{v_0}\| = 1$.

iv) Se tiene que:

$$\psi_{v_0}(T^*T) = \langle T^*T(\delta_{v_0}), \delta_{v_0} \rangle = \langle T(\delta_{v_0}), T^{**}(\delta_{v_0}) \rangle = \langle T(\delta_{v_0}), T(\delta_{v_0}) \rangle \geq 0. \square$$

También de manera similar a iii, aunque sin tomar valores absolutos:

$$\psi_{v_0}(I) = \langle I(\delta_{v_0}), \delta_{v_0} \rangle = \langle \delta_{v_0}, \delta_{v_0} \rangle = \|\delta_{v_0}\|^2 = 1. \square$$

Recordando la definición 3.3.1, por (iv), es posible afirmar que ψ_{v_0} es un estado. \square

Observación 3.3.1.3: Dada una gráfica G y u, v en $V(G)$, se define:

$$\psi_{u,v}(T) = \langle T(\delta_v), \delta_u \rangle.$$

Luego, (i) y (ii) de la proposición anterior siguen cumpliéndose, sin embargo (iii) y (iv) no necesariamente.

3. Productos de Gráficas

Definición 3.3.1.4: Dada una gráfica con raíz (G, v_0) , una medida de probabilidad es la **distribución de G con respecto a v_0** si μ satisface:

$$\langle A(G)^n \delta_{v_0}, \delta_{v_0} \rangle = \int_{\mathbb{R}} t^n d\mu(t)$$

con n en \mathbb{N} .

Es decir, μ es la distribución de $A(G)$ con respecto al estado $\psi_{\delta_{v_0}}$.

Es importante recordar que una **medida de probabilidad**, es una medida con la cualidad de que la medida del espacio total es uno.

3.3.2. La Distribución de $G_1 \square G_2$

A pesar de que no fue posible obtener, como en el caso del producto directo, una fórmula que caracterizara al espectro de $G_1 \square G_2$, sí es posible escribir la distribución del producto cartesiano, con respecto a $\psi_{u,v}$, en términos de las distribuciones de cada factor. Siendo esta una de las ventajas principales de la introducción de las distribuciones.

A fin de poder analizar a la distribución de el producto cartesiano, es necesario definir la convolución entre medidas:

Definición 3.3.2.1: Dadas dos medidas acotadas sobre la σ -álgebra inducida por un espacio vectorial W , μ_1 y μ_2 se define su **convolución** $\mu_1 * \mu_2$ como la medida sobre W que es la imagen de la medida producto $\mu_1 \otimes \mu_2$ sobre $W \times W$ bajo la f , con $f(x, y) = x + y$, es decir dado A en la σ -álgebra de $W \times W$, $\mu_1 * \mu_2(A) = \mu_1 \otimes \mu_2(A')$, con A' el conjunto de sumas $a + b$ con a, b en A . Se tiene que para todo $A \times B$ en $W \times W$, $\mu_1 \otimes \mu_2(A \times B) = \mu_1(A)\mu_2(B)$; en este párrafo \times denota al producto cartesiano de conjuntos.

Ahora se probará el siguiente lema:

Lema 3.3.2.2: Dadas dos medidas ν y μ , definidas en los borelianos de \mathbb{R} de soporte compacto, finitas y tales que para toda n en \mathbb{N} , si $\int_{\mathbb{R}} t^n d\nu(t) = \int_{\mathbb{R}} t^n d\mu(t)$ entonces $\nu = \mu$.

Demostración: Sean ν y μ medidas que cumplen las hipótesis del lema. Como ambas tienen soporte compacto, es posible suponer sin pérdida de generalidad que el soporte de ambas está contenido en un intervalo $[-L, L]$ con L un real positivo. De lo cual

$$\int_{[-L, L]} t^n d\nu(t) = \int_{\mathbb{R}} t^n d\nu(t) = \int_{\mathbb{R}} t^n d\mu(t) = \int_{[-L, L]} t^n d\mu(t).$$

3.3. Distribuciones Espectrales

Primeramente, obsérvese que por la linealidad de la integral se cumplen las siguientes igualdades:

(i) Dado $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene que $\int_{[-L,L]} \lambda t^n d\nu(t) = \int_{[-L,L]} \lambda t^n d\mu(t)$.

(ii) Dadas n, m en \mathbb{N} se tiene que $\int_{[-L,L]} t^n + t^m d\nu(t) = \int_{[-L,L]} t^n + t^m d\mu(t)$.

(iii) Por inducción de (i) y (ii), dados λ_i con $1 \leq i \leq n$, se tiene que:

$$\sum_{i=1}^n \int_{[-L,L]} \lambda_i t^i d\nu(t) = \sum_{i=1}^n \int_{[-L,L]} \lambda_i t^i d\mu(t).$$

De lo anterior, se infiere que para cualquier polinomio $P[t]$ de grado n , para cualquier n natural, se cumple que:

$$\int_{[-L,L]} P[t] d\nu(t) = \int_{[-L,L]} P[t] d\mu(t).$$

Se sabe por el teorema de Stone-Weierstrass, que toda función continua en un compacto, puede ser aproximada por polinomios.

Entonces dada $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, existe una sucesión de polinomios $\{P_k(t)\}_{k=1}^\infty$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} P_k = f$, por lo tanto:

$$\int_{[-L,L]} f(t) d\mu(t) = \int_{[-L,L]} \lim_{k \rightarrow \infty} P_k(t) d\mu(t).$$

Pero la convergencia es uniforme, entonces:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[-L,L]} P_k(t) d\nu(t) = \int_{[-L,L]} \lim_{k \rightarrow \infty} P_k(t) d\nu(t) = \int_{[-L,L]} f(t) d\nu(t).$$

De lo cual:

$$\int_{[-L,L]} f(t) d\mu(t) = \int_{[-L,L]} f(t) d\nu(t),$$

para cualquier f continua en $[-L, L]$.

Ahora dadas $a < b$ en \mathbb{R} , se considera $\chi_{(a,b)}$, la función indicadora del intervalo (a, b) . Si se toma la sucesión de funciones continuas $\{f_n\}_{n=1}^\infty$, definidas como sigue:

$$f_n = \begin{cases} 0 & t < a - \frac{1}{n} \text{ o } t > b + \frac{1}{n} \\ n(t - a) + 1 & a - \frac{1}{n} < t < a \\ 1 & a < t < b \\ -n(t - b) + 1 & b < t < b + \frac{1}{n} \end{cases}$$

3. Productos de Gráficas

es claro que cuando n tiende a infinito f_n converge puntualmente a $\chi_{(a,b)}$. Notando que $|f_n| \leq 1$, y considerando que la constante 1 es integrable con respecto a μ en el espacio en que se está trabajando, por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue, para la medida μ se tiene que:

$$\int_{[-L,L]} f(t)d\mu(t) = \int_{[-L,L]} \chi_{(a,b)}(t)d\mu(t).$$

Ahora lo mismo se tiene para la medida ν :

$$\int_{[-L,L]} f(t)d\nu(t) = \int_{[-L,L]} \chi_{(a,b)}(t)d\nu(t).$$

De lo cual:

$$\int_{[-L,L]} \chi_{(a,b)}(t)d\mu(t) = \int_{[-L,L]} \chi_{(a,b)}(t)d\nu(t).$$

Pero por definición:

$$\mu(a, b) = \int_{[-L,L]} \chi_{(a,b)}(t)d\mu(t).$$

Por lo cual:

$$\mu(a, b) = \nu(a, b).$$

Es importante recordar que a y b eran cualesquiera par de reales tal que $a < b$ y que los intervalos de tipo (a, b) con a, b en \mathbb{R} y $a < b$, son generadores de los borelianos en \mathbb{R} , por lo que hasta aquí se ha probado que en un conjunto generador las medidas coinciden.

Por lo tanto, como medidas $\mu = \nu$. \square

Dada una gráfica G y u, v dos de sus vértices, $\mu_{u,v}^A(G)$ denota a la distribución de G con respecto al estado $\psi_{u,v}$, recordando la observación 3.2.2.3, es posible obtener el siguiente resultado:

Proposición 3.3.2.3: Dadas dos gráficas localmente finitas G_1 y G_2 , cuyos conjuntos de vértices sean V_1 y V_2 respectivamente, se tiene que:

$$\mu_{(u_i, v_j), (u_m, v_n)}^{A(G_1 \square G_2)} = \mu_{u_i, u_m}^{A(G_1)} * \mu_{v_j, v_n}^{A(G_2)},$$

para cualesquiera $(u_i, v_j), (u_m, v_n)$ vértices de $G_1 \square G_2$.

Demostración: Se denotará por δ_{u_i} al vector canónico de $\ell_2(V_1)$ asociado al índice u_i y δ'_{v_j} al vector canónico de $\ell_2(V_2)$ asociado al índice v_j .

Considerese:

$$\langle (A(G_1 \square G_2))^k(\delta_{u_i} \otimes \delta'_{v_j}), (\delta_{u_m} \otimes \delta'_{v_n}) \rangle.$$

Por el lema 3.2.2.3 se tiene que esto es igual a :

$$\sum_{l=0}^k \langle (A(G_1))^l \otimes (A(G_2))^{k-l}(\delta_{u_i} \otimes \delta'_{v_j}), (\delta_{u_m} \otimes \delta'_{v_n}) \rangle,$$

es decir:

$$\sum_{l=0}^k \langle (A(G_1))^l(\delta_{u_i}) \otimes (A(G_2))^{k-l}(\delta'_{v_j}), (\delta_{u_m} \otimes \delta'_{v_n}) \rangle.$$

Por como se definió el producto interior, se reescribe:

$$\sum_{l=0}^k \langle (A(G_1))^l(\delta_{u_i}), \delta_{u_m} \rangle \langle (A(G_2))^{k-l}(\delta'_{v_j}), \delta'_{v_n} \rangle.$$

Ahora recordando la notación introducida de manera previa al lema 3.2.3.4, esto es lo mismo que:

$$\sum_{l=0}^k \int t^l d\mu_{\delta_{u_i} \delta_{u_m}} \int s^{k-l} d\mu_{\delta'_{v_j} \delta'_{v_n}},$$

y simplificando:

$$\sum_{l=0}^k \int \int t^l s^{k-l} d\mu_{\delta_{u_i} \delta_{u_m}} d\mu_{\delta'_{v_j} \delta'_{v_n}}.$$

Es posible reescribirlo como:

$$\int \int (t + s)^k d\mu_{\delta_{u_i} \delta_{u_m}} d\mu_{\delta'_{v_j} \delta'_{v_n}},$$

que a su vez, por la definición 3.3.2.1 y el teorema de Fubini es:

$$\int \int (t + s)^k d(\mu_{\delta_{u_i} \delta_{u_m}} \otimes \mu_{\delta'_{v_j} \delta'_{v_n}}).$$

De nuevo por la misma definición, con $u = t + s$, se tiene que esto es:

$$\int (u)^k d(\mu_{\delta_{u_i} \delta_{u_m}} * \mu_{\delta'_{v_j} \delta'_{v_n}}).$$

Por el lema 3.3.2.2 se concluye que $\mu_{(u_i, v_j), (u_m, v_n)}^{A(G_1 \square G_2)} = \mu_{u_i, u_m}^{A(G_1)} * \mu_{v_j, v_n}^{A(G_2)}$. \square

Como fue posible observar, existen maneras de asociar medidas de probabilidad y distribuciones espectrales a una gráfica.

3. Productos de Gráficas

Es importante recordar que en el sentido usual de la probabilidad, se tiene que una variable aleatoria es una función medible con respecto a una σ -álgebra Σ , de conjuntos en un espacio Ω , cuyo dominio es Ω y su contradominio los números reales.

Su distribución inducida f_x se define como la composición de medida de probabilidad asociada al espacio μ_X aplicada a los conjuntos de tipo $\{X \leq x\}$ con x en \mathbb{R} . Donde $\{X = x\}$ denota al conjunto $\{X(w) = x | w \in \Omega\}$.

Es decir:

$$f_X(x) = \mu_X(X^{-1}(x))$$

que es una función de variable e imagen real.

Que dos variables aleatorias sean independientes en el sentido usual quiere decir entre otras cosas que

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(x)$$

donde dada una medida de probabilidad μ ,

$$f_{X,Y}(x,y) = \mu(\{X = x\} \cap \{Y = y\}).$$

Nota: Si X es una variable aleatoria que se distribuye como f_X y Y es una variable aleatoria que se distribuye como f_Y , si X y Y son independientes (en el sentido usual) $X + Y$ se distribuye como $f_X * f_Y$

Pues haciendo $Z = X + Y$, se tiene que:

$$\{Z = z\} = \{X + Y = z\},$$

es decir

$$\{Z = z\} = \bigcup_{k \in \mathbb{R}} \{X = k\} \cap \{Y = z - k\}.$$

Considerar asignar una medida a este conjunto implica (puesto que los espacios de medida asociados no son los mismos) incursionar en el terreno de medidas producto. Así:

$$\mu_X \otimes \mu_Y(\{Z = z\}) = \mu_X \otimes \mu_Y\left(\bigcup_{k \in \mathbb{R}} \{X = k\} \cap \{Y = z - k\}\right).$$

De lo cual, por la independencia:

$$\mu_X \otimes \mu_Y(\{Z = z\}) = \int_{\mathbb{R}} \mu_X(\{X = k\})\mu_Y(\{Y = z - k\}),$$

Por lo que:

$$f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} f_X(k)f_Y(z - k)dk.$$

3.4. Espacios de Probabilidad No Conmutativos

De ello se tiene que $f_Z = f_X * f_Y$.

La convolución presente aquí no es sólo entre las funciones de distribución asociadas a las variables aleatorias, además dado un boreliano B , si se define al conjunto:

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}_2 : x + y \in B\}$$

se tiene que η y λ medidas definidas en los borelianos, la convolución de medidas $\eta * \lambda$, también definida en los borelianos, cumplen (puede consultarse en [20]) :

$$\eta * \lambda(B) = \eta \otimes \lambda(B).$$

Por lo que, en el ejemplo anterior:

$$\mu_X \otimes \mu_Y = \mu_X * \mu_Y.$$

Por la proposición 3.3.2.3, podría pensarse que es posible relacionar las distribuciones asociadas al producto cartesiano con variables aleatorias. Pero, en principio relacionar al operador $A(G_1 \square G_2)$ con la suma de dos variables aleatorias independientes, según el sentido clásico de independencia entre variables aleatorias, carece de sentido, pues se está intentando ver como suma de variables aleatorias (funciones cuya imagen es real) a un operador entre espacios de Hilbert.

Sin embargo, más adelante, se verá que es posible considerar a dicho operador como la suma de dos variables aleatorias independientes, aunque con un concepto de variables aleatorias y de independencia mucho más general.

A fin de formalizar esta y otras nociones, es necesario introducir otros conceptos, empezando por un nuevo tipo de espacios, esto se hará en la siguiente sección.

3.4. Espacios de Probabilidad No Conmutativos

Este tipo de espacios, permiten generalizar las nociones usuales de la probabilidad.

Definición 3.4.1: Un espacio de probabilidad no conmutativa es un par (A, φ) conformado por un álgebra con unidad A sobre los complejos y un funcional lineal φ de A a \mathbb{C} que cumple que $\varphi(1_A) = 1$. Los elementos de A se conocen como variables aleatorias, formalmente, variables aleatorias no conmutativas. También, se define un espacio algebraico de probabilidad-*, como el par (A, φ)

3. Productos de Gráficas

con A un álgebra-* (definida en el apéndice A) y ϕ un estado perteneciente a A .

El caso clásico de espacios de probabilidad es considerado en el siguiente:

Ejemplo 3.4.2: El caso clásico Considérese la terna (Ω, Σ, P) , donde Ω es un conjunto, Σ una σ -álgebra de conjuntos medibles de Ω y $P : \Sigma \rightarrow [0, 1]$ una medida de probabilidad. El álgebra-* a considerar será $L^\infty(\Omega, P)$, es importante notar que esta álgebra-* es conmutativa.

En esta álgebra-* la función involución está dada de la siguiente manera: dado f en A , $f^* = \bar{f}$, se tiene que:

- $(f^*)^* = \bar{\bar{f}} = f$;
- $(fg)^* = \bar{fg} = \bar{g}\bar{f} = g^*f^*$.

Además, como $|f| = |\bar{f}|$, A es cerrado bajo involuciones.

Se definirá la siguiente función:

$$\varphi(f) = \int_{\Omega} f(\omega) dP(\omega) \quad \text{para toda } f \text{ en } L^\infty(\Omega, P).$$

Obsérvese que:

- $\varphi(ff^*) = \int_{\Omega} ff^*(\omega) dP(\omega) = \int_{\Omega} f \bar{f}(\omega) dP(\omega) = \int_{\Omega} |f|^2(\omega) dP(\omega) \geq 0$
- $\varphi(1_A) = \int_{\Omega} 1(\omega) dP(\omega) = P(\Omega) = 1$.

Por lo que φ así definida es un estado y (A, φ) un espacio de probabilidad clásico.

Nota: Una variable aleatoria (definición previa a la observación 3.3.2.4), queda considerada en el ejemplo, siempre y cuando sea acotada, en particular, todas aquellas en las que Ω tiene cardinalidad finita, cumplen con esta condición.

A pesar de lo descrito en la nota, en la probabilidad usual se llegan a emplear variables aleatorias que no son acotadas, entre ellas muchas cuya distribución de probabilidad es de tipo continuo, por lo que un álgebra distinta es necesaria para englobar otros casos posibles.

Considérese:

Ejemplo 3.4.3: Para este caso, se considerará la terna (Ω, Σ, P) como en el ejemplo anterior y el álgebra-* a considerar será $A = \bigcap_{1 \leq p < \infty} L^p(\Omega)$.

Para ver que A es un álgebra-* , primero se observa que es cerrada bajo sumas

3.4. Espacios de Probabilidad No Conmutativos

por la desigualdad de Minkowski, por como se definen la suma de funciones y la multiplicación por escalares entre funciones, cumple con las condiciones de un espacio vectorial con el neutro aditivo la constante cero y el multiplicativo la constante uno; también, es cerrado bajo multiplicación, por la desigualdad de Hölder generalizada. Como la multiplicación de funciones en estos espacios es conmutativa, A es conmutativa. Además, como en el caso anterior, A es cerrada bajo involuciones.

Considérese ahora, para f en A , $\varphi(f) = \mathbb{E}(f)$, donde $\mathbb{E}(f)$ representa la esperanza de f .

Por último, es posible asociarle a una gráfica un espacio de probabilidad no conmutativo como puede observarse en el siguiente:

Ejemplo 3.4.4: Sea (G, e) una gráfica con raíz, considérese el par (B, φ) con B la cerradura de el álgebra C^* generada por $\{A(G), I\}$ y $\varphi = \psi_e$ (tal como se definió en la sección 3.3.1). Por la observación 3.3.1.2, se tiene que φ es un estado. Por lo que (B, φ) es un espacio de probabilidad- $*$.

3.4.1. Nuevas Nociones de Independencia

En la probabilidad clásica, dado un espacio de probabilidad (Ω, Σ, P) y x, y cualesquiera dos reales, la noción de independencia de dos variables aleatorias X y Y quedaba determinada por el cumplimiento de la siguiente igualdad:

$$P[(X \leq x) \cap (Y \leq y)] = P(X \leq x)P(Y \leq y)$$

donde $(X \leq x)$ representa al conjunto de w en Ω , tales que $X(w) \leq x$.

En términos de la esperanza, si X y Y son dos variables aleatorias independientes, se tiene que:

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Como los espacios de probabilidad no son necesariamente conmutativos, esta noción de independencia, también llamada clásica, es una de las muchas nociones de independencia que pueden ser consideradas. Otras nociones como la independencia monótona, la independencia booleana y la independencia libre se abordarán más adelante.

Es pues el momento de introducir la definición de momentos mixtos:

3. Productos de Gráficas

Definición 3.4.1.1: Dado un espacio de probabilidad (A, φ) y n variables aleatorias X_1, \dots, X_n no necesariamente distintas dos a dos en A , una cantidad de tipo: $\varphi(X_1 X_2 \cdots X_n)$ es llamada un **momento mixto** de X_1, \dots, X_n .

Ejemplo 3.4.1.2: Dado un espacio de probabilidad clásico definido como en el ejemplo 3.4.4 por la terna (Ω, Σ, P) y dadas X y Y dos variables aleatorias reales, un momento mixto podría ser:

$$\mathbb{E}(X X Y Y X Y X Y Y X).$$

Aunque por la conmutatividad en este espacio y la noción clásica de independencia en término de la esperanza, si X y Y son independientes, se cumple:

$$\mathbb{E}(X X Y Y X Y X Y Y X) = \mathbb{E}(X^5 Y^5) = \mathbb{E}(X^5) \mathbb{E}(Y^5).$$

Como el ejemplo 3.4.1.2 mostró, es posible definir una noción de independencia en relación a los momentos mixtos de las variables aleatorias en el álgebra, de esta forma se definirán más adelante la independencia monótona, booleana y libre. Además de asociarse a los espacios y operadores de adyacencia de ciertas gráficas producto una relación con cada una de estas independencias.

3.4.2. La Independencia Tensorial

Definición 3.4.2.1: Según [25], dado un espacio de probabilidad algebraica (A, φ) . La familia de conjuntos $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ tales que para cada λ , A_λ es una subálgebra-* de A ; es **independiente en el sentido tensorial o conmutativo** con respecto a φ si para a_i en A_{λ_i} , se tiene que si λ_1 no pertenece al conjunto $\{\lambda_2, \dots, \lambda_m\}$ entonces:

$$\varphi(a_1 a_2 \cdots a_m) = \varphi(a_1) \varphi(a_2 \cdots a_m).$$

Y si r es el menor número para el cual $\lambda_1 = \lambda_r$ se tiene que:

$$\varphi(a_1 \cdots a_m) = \varphi(a_2 \cdots a_{r-1} (a_1 a_r) \cdots a_m).$$

Ahora ya se tienen las herramientas suficientes para ver al operador de adyacencia del producto cartesiano como la suma de variables aleatorias independientes:

3.4. Espacios de Probabilidad No Conmutativos

Proposición 3.4.2.2: Sean H_1 y H_2 espacios de Hilbert. Considérese el espacio de probabilidad-* $\mathcal{B}((H_1 \otimes H_2), \psi)$ donde $\psi = \psi_\xi$ (definición 3.3.1.1), con $\xi = \delta_{e_1} \otimes \delta_{e_2}$.

Sea A_1 el conjunto de los operadores de la forma $I_1 \otimes T_2$ y A_2 el de los operadores de la forma $T_1 \otimes I_2$ donde I_i y T_i son la identidad en (H_i) y un operador en $\mathcal{B}(H_i)$ respectivamente. Entonces la familia $\{A_k\}_{1 \leq k \leq 2}$ es independiente en el sentido tensorial.

Demostración: Se verá primeramente que $\{A_1\}$ es una subálgebra-*, el caso $\{A_2\}$ es completamente análogo.

Dados $I_1 \otimes T_2$ y $I_1 \otimes S_2$ en $\{A_1\}$ se tiene que:

- $I_1 \otimes T_2 + I_1 \otimes S_2$, por propiedades del producto tensorial se traduce en que $I_1 \otimes (T_2 + S_2)$, como $(T_2 + S_2)$ vive en $\mathcal{B}(H_i)$, entonces $a + b$ pertenece a A_1 .
- $(I_1 \otimes T_2)(I_1 \otimes S_2)$ que por propiedades del producto tensorial se transforma en: $(I_1 \otimes (T_2)(S_2))$ que también pertenece a A_1 .
- Es además cerrada bajo involuciones, pues $(I_1 \otimes T_2)^* = (I_1 \otimes T_2^*)$.

Dejando eso de lado, sean $I_1 \otimes T_2$ en A_2 y $T_1 \otimes I_2$ en A_1 con T_i perteneciente a $\mathcal{B}(H_i)$.

Luego:

$$\begin{aligned} \psi((T_1 \otimes I_2)(I_1 \otimes T_2)) &= \langle (T_1 \otimes I_2)(I_1 \otimes T_2)(\xi), \xi \rangle = \langle (T_1 \otimes I_2)(I_1 \otimes T_2)(\xi), \xi \rangle \\ &= \langle (T_1 \otimes T_2)(\delta_{e_1} \otimes \delta_{e_2}), (\delta_{e_1} \otimes \delta_{e_2}) \rangle = \langle (T_1(\delta_{e_1}) \otimes (T_2(\delta_{e_2})), (\delta_{e_2})) \rangle \\ &= \langle T_1(\delta_{e_1}), \delta_{e_1} \rangle \langle T_2(\delta_{e_2}), \delta_{e_2} \rangle = \langle T_1(\delta_{e_1}), \delta_{e_1} \rangle \langle T_2(\delta_{e_2}), \delta_{e_2} \rangle \langle \delta_{e_1}, \delta_{e_1} \rangle \langle \delta_{e_2}, \delta_{e_2} \rangle \\ &= \psi(T_1 \otimes I_2) \psi(I_1 \otimes T_2). \end{aligned}$$

Por lo que la familia $\{A\}_{1 \leq k \leq 2}$ es independiente en el sentido tensorial. \square

De la proposición anterior y de la descomposición dada por la proposición 3.2.1.1 se deduce que el operador de adyacencia del producto tensorial de dos gráficas con raíz (G_1, e_1) y (G_2, e_2) , se descompone como la suma de dos variables aleatorias independientes en el sentido tensorial. Dichas variables aleatorias son $A(G_1) \otimes I_2$ y $I_1 \otimes A(G_2)$. Con I_1 e I_2 , las identidades en $\ell_2(V(G_1))$ y $\ell_2(V(G_2))$ respectivamente.

3.5. El Producto Peine

Intuitivamente el producto peine, también llamado producto monótono (el origen de este segundo nombre, pronto quedará claro) consiste en tomar dos gráficas, y hacer tantas copias de la segunda como vértices tenga la primera y pegarlas por un vértice distinguido en cada vértice de la primera.

Se le conoce como producto peine, puesto que pictóricamente el producto peine de gráficas sencillas como P_k y P_j para cualesquiera k y j naturales, asemeja un peine.

Formalmente, se define de la siguiente manera:

Dadas dos gráficas conexas G_1, G_2 , con $V_1 = V(G_1), V_2 = V(G_2)$; y un vértice distinguido v de G_2 , el **producto peine** de G_1 con G_2 es la gráfica cuyo conjunto de vértices es:

$$H = \{(u, v) | u \text{ está en } V_1 \text{ y } v \text{ pertenece a } V_2\};$$

la relación de adyacencia está dada de la siguiente manera, los vértices (u_1, v_1) y (u_2, v_2) son adyacentes si $u_1 = u_2$ y $v_1 v_2$ es una arista de G_2 o la arista $u_1 u_2$ pertenece a $E(G_1)$ y $v_1 = v_2 = v$. A la gráfica G_1 se le conoce como *backbone*, que en el presente se traducirá como respaldo y a G_2 como *finger* que será traducido como dedo; este producto se denota por $G_1 \triangleright_v G_2$.

Ejemplo 3.5.1: Se observa en la imagen el producto peine entre P_6 y C_3 donde P_6 es el respaldo y C_3 el dedo, el vértice distinguido de C_3 es v .

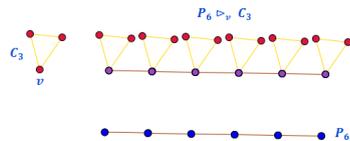


Figura 3.7: $P_6 \triangleright_v C_3$

3.5.1. El Operador de Adyacencia del Producto Peine

En la siguiente proposición se verá la relación entre los operadores de adyacencia de las gráficas dedo y respaldo y el operador de adyacencia de la gráfica producto peine, es importante notar que de la definición de dicho producto, este

operador actuará en $\ell_2(V_1 \times V_2)$; sin embargo, por la proposición 3.1.5 es posible trabajar salvo un cambio de base en $\ell_2(V_1) \otimes \ell_2(V_2)$.

Proposición 3.5.1.1: Dadas G_1 y G_2 gráficas localmente finitas, simples y conexas; $V_1 = V(G_1)$, $V_2 = V(G_2)$ y un vértice v distinguido de G_2 , con $A(G_1)$ y $A(G_2)$ las matrices asociadas a sus operadores de adyacencia se tiene, salvo un cambio de base, que:

$$A(G_1 \triangleright_v G_2) = A(G_1) \otimes P_2 + I_1 \otimes A(G_2)$$

donde P_2 es la proyección de $\ell_2(V_2)$, al subespacio generado por δ_v .

Demostración: Sean u_1, u_2 en V_1 y v_1, v_2 pertenecientes a V_2 ; se probará que la matriz asociada al operador de adyacencia de $G_1 \triangleright_v G_2$ definido en $\ell_2(V_1) \otimes \ell_2(V_2)$ coincide en la entrada $(u_1, v_1)(u_2, v_2)$ con :

$$A(G_1)_{u_1 u_2} \delta_{v_1 v} \delta_{v v_2} + \delta_{u_1 u_2} A(G_2)_{v_1 v_2}. \quad (3.3)$$

Sea pues la entrada $(u_1, v_1)(u_2, v_2)$ de $A(G_1 \triangleright_v G_2)$, se tienen dos casos: su valor es uno o cero.

Primer caso: Si su valor es uno, se tiene que (u_1, v_1) y (u_2, v_2) , son adyacentes, por la definición de producto peine, hay dos subcasos: Si $u_1 = u_2$ y $v_1 v_2$ pertenece a $E(G_2)$ se tiene entonces que $\delta_{u_1 u_2} A(G_2)_{v_1 v_2} = 1$, como además G_2 es simple $v_1 \neq v_2$ por lo que $A(G_1)_{u_1 u_2} \delta_{v_1 v} \delta_{v v_2} = 0$. Si $u_1 u_2$ está en $E(G_1)$ y $v_1 = v_2 = v$ entonces $A(G_1)_{u_1 u_2} \delta_{v_1 v} \delta_{v v_2} = 1$ y por la simplicidad de G_1 . $u_1 \neq u_2$, por lo que $\delta_{u_1 u_2} A(G_2)_{v_1 v_2} = 0$.

Segundo caso: Si su valor es cero, entonces (u_1, v_1) y (u_2, v_2) no son adyacentes por lo que se dan cuatro subcasos:

Si $u_1 \neq u_2$ y $v_1 \neq v$ o $v \neq v_2$, entonces en ambos sumandos se anula alguno de los factores de tipo δ y el valor de la ecuación 3.3 es cero.

Si $u_1 \neq u_2$ y $u_1 u_2$ no son adyacentes, entonces en el primer sumando de 3.3 se anula el factor asociado a $A(G_1)$ y en el segundo el factor tipo δ , de nuevo, el valor de la ecuación 3.3 es cero.

Si $v_1 v_2$ no es una arista de G_2 y $v_1 \neq v$ o $v_2 \neq v$, entonces se anula en el segundo sumando de 3.3 el factor asociado a $A(G_2)$ y en el primero alguna de las funciones δ , por lo cual la ecuación 3.3 suma 0.

Por último, si $v_1 v_2$ y $u_1 u_2$ no son adyacentes en G_2 y G_1 respectivamente, entonces en el primer sumando de 3.3 se anula el termino asociado a $A(G_1)$ y en

3. Productos de Gráficas

el segundo la entrada v_1v_2 de $A(G_2)$ y nuevamente 3.3 se anula.

Por lo que de cualquier forma:

$$A(G_1 \triangleright_v G_2)_{(u_1, v_1)(u_2, v_2)} = A(G_1)_{u_1 u_2} \delta_{v_1 v} \delta_{v v_2} + \delta_{u_1 u_2} A(G_2)_{v_1 v_2}.$$

Para concluir la prueba obsérvese que:

$$(A(G_1) \otimes P_2)_{(u_1, v_1)(u_2, v_2)} + (I_1 \otimes A(G_2))_{(u_1, v_1)(u_2, v_2)},$$

por como se realiza el producto de Kronecker, no es más que:

$$(A(G_1))_{u_1 u_2} (P_2)_{v_1 v_2} + (I_1)_{u_1 u_2} (A(G_2))_{v_1 v_2}.$$

Donde, es claro que $(I_1)_{u_1 u_2} = \delta_{u_1 u_2}$ y además dado que P_2 , toma cualquier v́ector y preserva la parte generada por v , la entrada v_1v_2 de P_2 puede expresarse como el producto $\delta_{v_1 v} \delta_{v v_2}$.

Por lo que queda demostrada la afirmación. \square

Si el concepto de producto peine se extiende a una cantidad finita de gŕaficas (simplemente realizando el producto peine entre las primeras dos, luego a la gŕafica resultante con la siguiente, en orden de izquierda a derecha, siempre con dos gŕaficas a la vez), este producto es asociativo; y permite generalizar la proposici3n 3.5.1.2 de la siguiente manera:

Proposici3n 3.5.1.2: Dado i en el conjunto $\{1, \dots, n\}$, (G_i, e_i) seŕa una gŕafica con ra'iz. Entonces la matriz de adyacencia del producto peine:

$$A(G_1 \triangleright_{e_2} G_2 \triangleright_{e_3} G_3 \triangleright_{e_4} \dots \triangleright_{e_{n-1}} G_{n-1} \triangleright_{e_n} G_n)$$

estaŕa dado por una descomposici3n similar a:

$$\sum_{i=1}^n I_1 \otimes \dots \otimes I_{i-1} \otimes A(G_i) \otimes P_{i+1} \otimes \dots \otimes P_n$$

donde P_j es la proyecci3n de $\ell_2(V(G_j))$ al espacio generado por δ_{e_j} .

Demostraci3n: La prueba es por inducci3n, antes de hacerla es conveniente recordar que el operador mencionado est́a actuando en el producto tensorial de los espacios de Hilbert asociados a cada gŕafica, pero no se ahondaŕa en esto. Para la base considérese el caso $k = 2$, que por la proposici3n 3.5.1.1, ya est́a demostrado. Suponǵamos valido para $k = n$. Si $k = n + 1$, tambi3n por la

proposición 3.5.1.1, notando por supuesto que el I_1 , de la expresión en la proposición anterior, será el uno asociado al espacio en que actúa el operador $A(G_1 \triangleright_{e_2} G_2 \triangleright_{e_3} G_3 \triangleright_{e_4} \cdots \triangleright_{e_{n-1}} G_{n-1} \triangleright_{e_n} G_n)$, es decir

$$I_1 \otimes I_2 \otimes \cdots \otimes I_n.$$

Hecha esta aclaración se tiene por la proposición mencionada que:

$$\begin{aligned} & A(G_1 \triangleright_{e_2} G_2 \triangleright_{e_3} G_3 \triangleright_{e_4} \cdots \triangleright_{e_{n-1}} G_{n-1} \triangleright_{e_n} G_n \triangleright_{e_{n+1}} G_{n+1}) \\ = & A(G_1 \triangleright_{e_2} G_2 \triangleright_{e_3} G_3 \triangleright_{e_4} \cdots \triangleright_{e_{n-1}} G_{n-1} \triangleright_{e_n} G_n) \otimes P_{n+1} + I_1 \otimes I_2 \otimes \cdots \otimes I_n \otimes A(G_{n+1}). \end{aligned}$$

Por hipótesis de inducción, esto es similar a:

$$\left(\sum_{i=1}^n I_1 \otimes \cdots \otimes I_{i-1} \otimes A(G_i) \otimes P_{i+1} \otimes \cdots \otimes P_n \right) \otimes P_{n+1} + I_1 \otimes I_2 \otimes \cdots \otimes I_n \otimes A(G_{n+1}).$$

Por las propiedades de n -linealidad esto es:

$$\left(\sum_{i=1}^n I_1 \otimes \cdots \otimes I_{i-1} \otimes A(G_i) \otimes P_{i+1} \otimes \cdots \otimes P_n \otimes P_{n+1} \right) + (I_1 \otimes I_2 \otimes \cdots \otimes I_n \otimes A(G_{n+1})).$$

Reescribiendo se tiene que esto es:

$$\sum_{i=1}^{n+1} I_1 \otimes \cdots \otimes I_{i-1} \otimes A(G_i) \otimes P_{i+1} \otimes \cdots \otimes P_n \otimes P_{n+1},$$

que es lo que se quería demostrar. \square

3.5.2. Independencia Monótona

Hay un tipo de independencia asociado al comportamiento de un espacio de probabilidad algebraico (A, ψ) , con A el álgebra C^* generada por una gráfica proveniente de un producto peine; y un estado φ . Esta noción, es llamada independencia monótona.

Acorde a [25]:

Definición 3.5.2.1: Dado un conjunto totalmente ordenado $(\Gamma, <)$ y una sucesión finita $\{\gamma_i\}_{1 \leq i \leq n}$ con $n \geq 2$, de elementos en Γ tales que $\gamma_i \neq \gamma_{i+1}$. Decimos que γ_p es un **pico** si sucede cualquiera de los siguientes casos:

- $p = 1$ y $\gamma_1 > \gamma_2$;
- $1 < p < n$, $\gamma_p > \gamma_{p-1}$ y $\gamma_p > \gamma_{p+1}$;
- $p = n$ y $\gamma_n > \gamma_{n-1}$.

3. Productos de Gráficas

Definición 3.5.2.2: Dado un espacio de probabilidad-* (A, φ) y una familia de conjuntos $\{A_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ donde $(\Gamma, <)$ es un conjunto totalmente ordenado tales que para cada γ , A_γ es una subálgebra-* de A , no necesariamente con uno. Decimos que esta familia es **independiente en el sentido monótono** (con respecto a φ) si, para cualesquiera a_i en A_{γ_i} , se tiene que :

$$\varphi(a_1 a_2 \cdots a_n) = \varphi(a_p) \varphi(a_1 \cdots a_{p-1} a_{p+1} \cdots a_n).$$

con γ_p un pico en la sucesión $\{\gamma_i\}_{1 \leq i \leq n}$ tal que $\gamma_1 \neq \gamma_2 \neq \cdots \neq \gamma_n$.

A continuación se verá como se refleja esta independencia en el producto tensorial de espacios de Hilbert:

Proposición 3.5.2.3: Dada k en $\{1, \dots, n\}$ sea H_k un espacio de Hilbert. Considere el espacio de probabilidad-* algebraico

$$\mathcal{B}((H_1 \otimes H_2 \otimes \cdots \otimes H_n), \psi)$$

donde ψ es un estado en $\mathcal{B}(H_1 \otimes H_2 \otimes \cdots \otimes H_n)$ asociado al vector unitario $\xi = \xi_1 \otimes \xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \cdots \otimes \xi_n$, con ξ_i un vector unitario de H_i . También, de aquí en adelante, $\mathcal{B}(X)$ denotará a los operadores lineales acotadas de X .

Sea A_k el conjunto de los operadores de la forma

$$I_1 \otimes \cdots \otimes I_{k-1} \otimes T_k \otimes P_{k+1} \otimes \cdots \otimes P_n$$

donde I_i es la identidad en $\mathcal{B}(H_i)$, T_k pertenece a $\mathcal{B}(H_k)$ y P_i es la proyección al espacio unidimensional generado por ξ_i . Entonces la familia $\{A_k\}_{1 \leq k \leq n}$ es independiente en el sentido monótono.

Demostración: Antes que nada, debe observarse que para cada k entre 1 y n que dados a, b en A_k ,

$$a = I_1 \otimes \cdots \otimes I_{k-1} \otimes T_k \otimes P_{k+1} \otimes \cdots \otimes P_n$$

$$b = I_1 \otimes \cdots \otimes I_{k-1} \otimes S_k \otimes P_{k+1} \otimes \cdots \otimes P_n$$

con T_k y S_k , elementos de $\mathcal{B}(H_k)$. Por como se comporta el producto tensorial:

$$\begin{aligned} ab &= (I_1 \otimes \cdots \otimes I_{k-1} \otimes T_k \otimes P_{k+1} \otimes \cdots \otimes P_n)(I_1 \otimes \cdots \otimes I_{k-1} \otimes S_k \otimes P_{k+1} \otimes \cdots \otimes P_n) \\ &= (I_1)(I_1) \otimes \cdots \otimes (I_{k-1})(I_{k-1}) \otimes (S_k)(T_k) \otimes (P_{k+1})(P_{k+1}) \otimes \cdots \otimes (P_n)(P_n), \end{aligned}$$

pero por ser cerrado bajo productos, $(S_k)(T_k)$ pertenece a $\mathcal{B}(H_k)$, además las proyecciones son idempotentes y $(I_j)(I_j) = (I_j)$ por lo que ab está en A_k .

3.5. El Producto Peine

De forma muy parecida, es fácil ver que $a + b$ pertenece a A_k , la prueba es casi idéntica a la incluida en la proposición 3.6.2.2.

Además, considérese

$$\begin{aligned} a^* &= (I_1 \otimes \cdots \otimes I_{k-1} \otimes T_k \otimes P_{k+1} \otimes \cdots \otimes P_n)^* \\ &= I_1^* \otimes \cdots \otimes I_{k-1}^* \otimes T_k^* \otimes P_{k+1}^* \otimes \cdots \otimes P_n^* = I_1 \otimes \cdots \otimes I_{k-1} \otimes T_k^* \otimes P_{k+1} \otimes \cdots \otimes P_n, \end{aligned}$$

dado que $\mathcal{B}(H_k)$ es cerrada bajo toma de adjuntos, T_k^* vive allí por lo que A_k es cerrado bajo involuciones.

Ahora, a probar la proposición:

Para no sobrecargar la notación: Sea $H = H_1 \otimes \cdots \otimes H_n$.

Entonces, sea $l \geq 2$ y sean $k_1 \neq k_2 \neq \cdots \neq k_l$ perteneciente a $\{1, 2, \dots, n\}$, donde k_p en $\{1, 2, \dots, n\}$ será un pico de la sucesión de k_i y a_i estará en A_{k_i} , siendo $a_i = 1_1 \otimes \cdots \otimes 1_{k_i-1} \otimes T_{k_i} \otimes P_{k_i+1} \otimes \cdots \otimes P_n$ con T_{k_i} en $\mathcal{B}(H_{k_i})$.

Primero, obsérvese que si $k_m > k_h$ para m, h naturales, se tiene que:

$$\begin{aligned} a_h^* a_m^*(\xi) &= (I_1 \otimes \cdots \otimes I_{k_h-1} \otimes T_{k_h}^* \otimes I_{k_h} \otimes I_{k_h+1} \otimes P_{k_h+1} \otimes \cdots \otimes P_{k_m} \otimes T_{k_m}^* \otimes P_{k_m+1} \otimes \cdots \otimes P_n)(\xi) \\ &= (I_1 \otimes \cdots \otimes I_{k_h-1} \otimes T_{k_h}^* \otimes P_{k_h+1} \otimes \cdots \otimes P_{k_m} \otimes T_{k_m}^* \otimes P_{k_m+1} \otimes \cdots \otimes P_n)(\xi) \\ &= I_1(\xi_1) \otimes \cdots \otimes T_{k_h}^*(\xi_{k_h}) \otimes P_{k_h+1}(\xi_{k_h+1}) \otimes \cdots \otimes P_{k_m} \otimes T_{k_m}^*(\xi_{k_m}) \otimes P_{k_m+1}(\xi_{k_m+1}) \otimes \cdots \otimes P_n(\xi_n). \end{aligned}$$

Por como se definen las proyecciones:

$$P_{k_m} \otimes T_{k_m}^*(\xi_{k_m}) = \langle T_{k_m}^*(\xi_{k_m}), (\xi_{k_m}) \rangle \xi_{k_m}.$$

Puesto que los operadores son proyecciones e identidades y la composición de ellas, al aplicarse a un vector del producto tensorial, dará el mismo vector salvo por la entrada k_p y dado el comportamiento del producto interior, se tiene que:

$$\begin{aligned} \langle a_m^*(\xi), \xi \rangle \xi_{k_m} &= (\langle \xi_1, \xi_1 \rangle \cdots \langle T_{k_m}^*(\xi_{k_m}), \xi_{k_m} \rangle \cdots \langle \xi_n, \xi_n \rangle) \xi_{k_m} \\ &= \langle T_{k_m}^*(\xi_{k_m}), \xi_{k_m} \rangle \|\xi_1\| \cdots \|\xi_n\| \xi_{k_m}, \end{aligned}$$

puesto que eran unitarios todos:

$$\langle T_{k_m}^*(\xi_{k_m}), \xi_{k_m} \rangle \xi_{k_m} = \langle a_{k_m}^* \xi, \xi \rangle \xi_{k_m}$$

Entonces, es útil notar que, sacando ese escalar, por la n -linealidad:

$$a_h^* a_m^*(\xi) = (\langle a_m^* \xi, \xi \rangle) (\xi_1 \otimes \cdots \otimes T_{k_h}^*(\xi_{k_h}) \otimes \cdots \otimes \xi_{k_m} \otimes \xi_n) = \langle a_m^* \xi, \xi \rangle a_h^*(\xi). \quad (3.4)$$

3. Productos de Gráficas

De la misma manera:

$$a_h a_m(\xi) = (\langle a_m \xi, \xi \rangle)(\xi_1 \otimes \cdots \otimes T_{k_h}(\xi_{k_h}) \otimes \cdots \otimes \xi_{k_m} \otimes \xi_n) = \langle a_m \xi, \xi \rangle a_h(\xi). \quad (3.5)$$

Ahora, como k_p es un pico, se tienen tres casos:

El primero consiste en que $p = 1$ y $k_2 < k_1$.

Entonces, por propiedades de los adjuntos:

$$\langle a_1 a_2 \cdots a_m(\xi), \xi \rangle = \langle a_3 \cdots a_l(\xi), a_2^* a_1^*(\xi) \rangle.$$

Por (3.4) y la sesquilinealidad del producto interior, esto es:

$$\overline{\langle a_1^*(\xi), \xi \rangle} \langle a_3 \cdots a_l(\xi), a_2^* \xi \rangle = \langle a_1(\xi), (\xi) \rangle \langle a_3 \cdots a_l(\xi), a_2^* \xi \rangle.$$

Considerando al adjunto de a_1^* , esto se transforma en:

$$\langle a_1(\xi), \xi \rangle \langle a_2 a_3 \cdots a_l(\xi), \xi \rangle.$$

El segundo caso es similar, se da cuando $p = l$ y $k_{l-1} < k_l$.

Entonces se tiene que

$$\langle a_1 a_2 \cdots a_l(\xi), \xi \rangle = \langle a_{l-1} a_l(\xi), a_{l-2}^* \cdots a_2^* a_1^*(\xi) \rangle$$

Por (3.5) y la linealidad de la primera entrada del producto interior, esto no es más que:

$$\langle a_l(\xi), \xi \rangle \langle a_{l-1}(\xi), a_{l-2}^* \cdots a_2^* a_1^*(\xi) \rangle.$$

Considerando al adjunto de a_1^* , esto se transforma en:

$$\langle a_1(\xi), \xi \rangle \langle a_2 a_3 \cdots a_l(\xi), \xi \rangle.$$

Es decir

$$\langle a_l(\xi), \xi \rangle \langle a_1 a_2 a_3 \cdots a_{l-1}(\xi), \xi \rangle.$$

El tercer y último caso es aquel en que $1 \neq p \neq l$ y $k_{p-1} < k_p$ y $k_p < k_{p+1}$.

Basta probar el caso en que k_p es el primer pico.

Si k_p es el primer pico de la sucesión, entonces forzosamente $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_{p-1} < a_p > a_{p+1}$, pues de otra forma, alguno de los elementos anteriores sería un pico. Si $a_{p-1} < a_{p+1}$ se tiene que:

$$a_{p+1}^* a_p^* a_{p-1}^* \cdots a_1^*(\xi) = (I_1 \otimes \cdots \otimes I_{k_1} T_{k_1}^* P_{k_1} \otimes \cdots \otimes I_{k_{p-1}} T_{k_{p-1}}^* P_{k_{p-1}} \otimes \cdots \otimes I_{k_{p+1}} T_{k_{p+1}}^* P_{k_{p+1}} \otimes T_{k_p}^* P_{k_p} \otimes \cdots \otimes P_n)(\xi)$$

3.5. El Producto Peine

$$= I_1(\xi_1) \otimes \cdots \otimes I_{k_1} T_{k_1}^* P_{k_1}(\xi_{k_1}) \otimes \cdots \otimes I_{k_{p+1}} T_{k_{p+1}}^* P_{k_{p+1}}(\xi_{p+1}) \otimes \cdots \otimes P_{k_p} T_{k_p}^*(\xi_p) \otimes \cdots \otimes P_n(\xi_n).$$

Pero la proyección P_r deja invariante a ξ_r , por lo que esto se convierte en:

$$I_1(\xi_1) \otimes \cdots \otimes T_{k_1}^* P_{k_1}(\xi_{k_1}) \otimes \cdots \otimes T_{k_{p-1}}^*(\xi_{p-1}) \otimes \cdots \otimes T_{k_{p+1}}^*(\xi_{p+1}) \otimes \cdots \otimes P_{k_p} T_{k_p}^*(\xi_p) \otimes \cdots \otimes P_n(\xi_n).$$

Por la n -linealidad del producto tensorial $a_{p+1}^* a_p^* a_{p-1}^* \cdots a_2^* a_1^*(\xi)$ es:

$$\begin{aligned} & (\langle a_p^*(\xi), \xi \rangle) (I_1(\xi_1) \otimes \cdots \otimes T_{k_1}^*(\xi_{k_1}) \otimes \cdots \otimes T_{k_{p+1}}^*(\xi_{k_{p+1}}) \otimes \cdots \otimes (\xi_{k_p}) \otimes P_{k_{p+1}}(\xi_{k_1}) \otimes \cdots \otimes P_n(\xi_n)) \\ &= (\langle a_p^* \xi, \xi \rangle) a_{p+1}^* a_p^* a_{p-1}^* \cdots a_2^* a_1^*(\xi) \end{aligned}$$

De lo cual:

$$\begin{aligned} \langle a_1 a_2 \cdots a_{p-1} a_p a_{p+1} \cdots a_l(\xi), \xi \rangle &= \langle a_{p+2} \cdots a_l(\xi), a_{p+1}^* a_p^* a_{p-1}^* \cdots a_2^* a_1^*(\xi) \rangle \\ &= \overline{\langle a_p^* \xi, \xi \rangle} \langle a_{p+2} \cdots a_l(\xi), a_{p+1}^* a_p^* a_{p-1}^* \cdots a_2^* a_1^*(\xi) \rangle \\ &= \overline{\langle a_p^* \xi, \xi \rangle} \langle a_1 a_2 \cdots a_{p-1} a_p a_{p+1} \cdots a_{k_l}(\xi), \xi \rangle \\ &= \langle a_p \xi, \xi \rangle \langle a_1 a_2 \cdots a_{p-1} a_p a_{p+1} \cdots a_l(\xi), \xi \rangle. \end{aligned}$$

Si por otra parte $k_{p+1} < k_{p-1}$, se tiene entonces que $a_{p+1}^* a_p^* a_{p-1}^* \cdots a_2^* a_1^*(\xi)$ es igual a:

$$\begin{aligned} & I_1(\xi_1) \otimes \cdots \otimes T_{k_{p+1}}^*(\xi_{k_{p+1}}) \otimes \cdots \otimes P_{k_i} T_{k_i}^*(\xi_{k_i}) \otimes \cdots \otimes P_{k_p} T_{k_p}^*(\xi_{k_p}) \otimes P_{k_{p+1}}(\xi_{k_{p+1}}) \otimes \cdots \otimes P_n(\xi_n) \\ &= \langle a_p^*, \xi \rangle I_1(\xi_1) \otimes \cdots \otimes T_{k_{p+1}}^*(\xi_{k_{p+1}}) \otimes \cdots \otimes P_{k_i} T_{k_i}^*(\xi_{k_i}) \otimes \cdots \otimes (\xi_{k_p}) \otimes P_{k_{p+1}}(\xi_{k_{p+1}}) \otimes \cdots \otimes P_n(\xi_n). \end{aligned}$$

Por lo que sigue siendo cierto que

$$a_{p+1}^* a_p^* a_{p-1}^* \cdots a_2^* a_1^*(\xi) = (\langle a_p^* \xi, \xi \rangle) a_{p+1}^* a_p^* a_{p-1}^* \cdots a_2^* a_1^*(\xi)$$

y la prueba anterior es válida.

Por lo que $\{A_k\}_{1 \leq k \leq n}$ satisface el criterio para ser considerada independiente en el sentido monótono. \square

Relación Entre la Independencia Monótona y el Producto Peine

Es importante recordar que salvo un cambio de base, se caracterizó al operador de adyacencia del producto peine de dos gráficas con raíz (G_1, e_1) y (G_2, e_2) de la siguiente manera:

$$A(G_1 \triangleright G_2) = A(G_1) \otimes P_2 + I_1 \otimes A(G_2)$$

3. Productos de Gráficas

donde P_2 es la proyección de $\ell_2(V(G_2))$ al generado por δ_{e_2} .

Considerando el espacio de probabilidad- $*$ (A, ψ_ξ) , donde A es el álgebra- $*$ dada por $\mathcal{B}(\ell_2(V(G_1)) \otimes \ell_2(V(G_2)))$ y ψ_ξ un estado como se definió en 3.3.1.1, donde $\xi = \delta_{e_1} \otimes \delta_{e_2}$. Se tiene entonces, que los elementos de la forma $I_1 \otimes A(G_2)$ y $A(G_1) \otimes P_2$, son variables aleatorias en relación con ese espacio de probabilidad- $*$. Además, dichos elementos, pertenecen a algun conjunto A_k como los definidos en la proposición anterior, por lo que los elementos de la descomposición, serán independientes en el sentido monótono.

También, de manera similar, considerando el producto peine de n gráficas y la proposición 3.5.1.2, es posible hacer una descomposición del operador de adyacencia, donde cada factor es una variable aleatoria de un espacio de probabilidad definido como en la proposición anterior, y además todo factor pertenece a algún conjunto de alguna familia A_k , por lo que dicha descomposición arroja n factores, que por la proposición 3.5.2.3, serán independientes en el sentido monótono.

El lector interesado puede consultar [2] para ver otros resultados relativos a la independencia monótona y su relación con el producto peine de gráficas.

3.6. El Producto Estrella

El producto estrella guarda cierta similitud con el producto peine, puesto que también juegan en el un papel importante los vértices distinguidos, aunque es un concepto más sencillo. Consiste en tomar dos gráficas con raíz y pegar ambas por sus respectivas raíces.

De manera formal, el producto estrella se define de la siguiente manera: El **producto estrella** entre las gráficas (G_1, e_1) con $V(G_1) = V_1$ y (G_2, e_2) donde $V(G_2) = V_2$; denotado formalmente como $(G_1, e_1) \star (G_2, e_2)$, o por simplicidad $G_1 \star G_2$, es la gráfica cuyo conjunto de vértices es:

$$V = \{(v, w) \text{ en } V_1 \times V_2 | v = e_1 \text{ o } w = e_2\}$$

La relación de adyacencia esta dada como sigue: Dados dos vértices de $G_1 \star G_2$ (v_1, w_1) y (v_2, w_2) , estos son adyacentes si $v_1 = v_2 = e_1$ y $w_1 w_2$ es una arista de G_2 o cuando $w_1 = w_2 = e_2$ y $v_1 v_2$ pertenece a $E(G_1)$.

Ejemplo 3.6.1: Se observa en la imagen el producto estrella entre las gráficas G_1 y G_2 , considerando sus vértices distinguidos v_1 y v_2 , respectivamente.

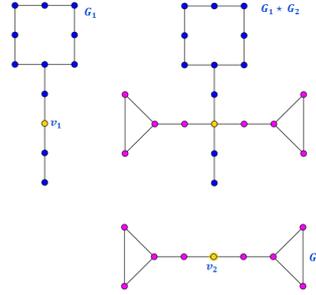


Figura 3.8: $G_1 \star G_2$

3.6.1. El Operador de Adyacencia del Producto Estrella

Así como se caracterizó el operador de adyacencia del producto peine en término de productos tensoriales es necesario ahora caracterizar el operador de adyacencia del producto estrella:

Proposición 3.6.1.1: Dadas dos gráficas con raíz (G_1, e_1) y (G_2, e_2) , con $V(G_1) = V_1$ y $V(G_2) = V_2$; el operador de adyacencia de $G_1 \star G_2$, salvo un cambio de base, esta dado de la siguiente manera:

$$A(G_1 \star G_2) = A(G_1) \otimes P_2 + P_1 \otimes A(G_2)$$

donde P_1 y P_2 son las proyecciones de $\ell_2(V_1)$ a $\langle \delta_{e_1} \rangle$ y de $\ell_2(V_2)$ a $\langle \delta_{e_2} \rangle$, respectivamente.

Demostración: La demostración se hara comprobando que las matrices asociadas a los operadores, son iguales entrada a entrada.

Dados u, u' en V_1 y v, v' en V_2 Observese que la entrada $(u, v)(u', v')$ de la matriz asociada al operador $A(G_1 \star G_2)$, es uno si los vértices (u, v) y (u', v') son adyacentes y cero si no lo son.

Caso 1:

Si son adyacentes, por como se definio el producto estrella, se tiene que sucede alguna de las siguientes: $u = u' = e_1$ y vv' pertenece al conjunto de aristas de G_2 o $v = v' = e_2$ y uu' pertenece al conjunto de aristas de G_1 . Si sucede lo primero, entonces $A(G_2)_{(vv')} = 1$ y $\delta_{ue_1}\delta_{e_1u'} = 1$, de la misma forma si sucede lo segundo: entonces $A(G_1)_{(uu')} = 1$ y $\delta_{ve_2}\delta_{e_2v'} = 1$.

Ambas cosas no pueden suceder al mismo tiempo, pues de ser así $u' = u$ y

3. Productos de Gráficas

u y u' serían adyacentes, por lo que G_1 no sería simple. De tal forma que $A(G_1)_{(uu')} \delta_{ve_2} \delta_{e_2v'} + A(G_2)_{(vv')} \delta_{ue_1} \delta_{e_1u'}$ sólo pueden ser cero o uno. De hecho, si toma el valor uno, alguno de los sumandos es cero y por tanto se cumple alguna de las condiciones de adyacencia y por tanto la entrada $(u, v)(u', v')$ de la matriz asociada a $A(G_1 \star G_2)$ tiene valor uno.

Caso 2:

Si no son adyacentes, entonces se cumple una de estas tres condiciones: $u \neq e_1$ o $e_1 \neq u'$ o v y v' no son adyacentes, también se cumple una de estas tres: $v \neq e_2$ o $e_2 \neq v'$ o uu' no es una arista de G_1 , para cualquier par de condiciones que se cumplan $A(G_1)_{(uu')} \delta_{ve_2} \delta_{e_2v'} = 0$ y $A(G_2)_{(vv')} \delta_{ue_1} \delta_{e_1u'} = 0$. También, en contraparte, si sucede que $A(G_1)_{(uu')} \delta_{ve_2} \delta_{e_2v'} + A(G_2)_{(vv')} \delta_{ue_1} \delta_{e_1u'} = 0$, entonces cada uno de los sumandos vale cero, por lo que se debe cumplir una condición de las tres de la primera lista y una de la segunda lista.

De lo cual, se concluye que:

$$(A(G_1 \star G_2))_{(u,v)(u',v')} = A(G_1)_{(uu')} \delta_{ve_2} \delta_{e_2v'} + A(G_2)_{(vv')} \delta_{ue_1} \delta_{e_1u'}.$$

Además, dados u, u' en $V(G_1)$ y v, v' en $V(G_2)$ la matriz asociada al operador $A(G_1) \otimes P_2 + P_1 \otimes A(G_2)$, al ser la suma de dos productos de Kronecker, puede escribirse como:

$$A(G_1)_{(u,u')} P_2_{(v,v')} + A(G_2)_{(v,v')} P_1_{(uu')}.$$

Es importante notar que:

$$P_1_{(u,u')} = \langle \delta_u, P_1(\delta_{u'}) \rangle = \langle \delta_u, \delta_{e_1u'} \rangle = \delta_{e_1u} \delta_{e_1u'}.$$

Analógamente:

$$P_2_{(v,v')} = \delta_{e_2v} \delta_{e_2v'}.$$

De lo cual :

$$(A(G_1) \otimes P_2 + P_1 \otimes A(G_2))_{(u,v)(u',v')} = A(G_1)_{(u,u')} \delta_{e_2v} \delta_{e_2v'} + A(G_2)_{(v,v')} \delta_{e_1u} \delta_{e_1u'}.$$

Por lo tanto los operadores coinciden entrada a entrada. \square

Tal como es posible considerar un producto peine de n factores, es posible considerar un producto estrella similar, igual que en el caso mencionado, llevando a cabo el producto estrella entre las primeras dos gráficas, luego operar la gráfica resultante con la siguiente, en orden de izquierda a derecha, siempre con dos gráficas a la vez, para ese tipo de producto se tiene la siguiente proposición:

Proposición 3.6.1.2: Dado i en el conjunto $\{1, \dots, n\}$, (G_i, e_i) será una gráfica con raíz, entonces la matriz de adyacencia del producto estrella:

$$A(G_1 \star G_2 \star G_3 \star \dots \star G_{n-1} \star G_n)$$

estará dado por una descomposición similar a:

$$\sum_{i=1}^n P_1 \otimes \dots \otimes P_{i-1} \otimes A(G_i) \otimes P_{i+1} \otimes \dots \otimes P_n$$

donde P_j es la proyección de $\ell_2(V(G_j))$ al espacio generado por δ_{e_j} .

Demostración: Se procederá por inducción, el caso base $k = 2$ queda demostrado en la proposición 3.6.1.1 .

Se supondrá válido para $k = n$.

Ahora para $k = n + 1$ se tiene que por la proposición 3.6.1.1:

$$A(G_1 \star G_2) = A(G_1) \otimes P_2 + P_1 \otimes A(G_2)$$

con P_1 y P_2 al espacio generado en relación a cada raíz.

Luego,

$$\begin{aligned} & A(G_1 \star G_2 \star G_3 \star \dots \star G_{n-1} \star G_n \star G_{n+1}) \\ &= A(G_1 \star G_2 \star G_3 \star \dots \star G_{n-1} \star G_n) \otimes P_{n+1} + P_* \otimes A(G_{n+1}). \end{aligned}$$

donde P_* es la proyección al subespacio generado por el canónico del espacio relacionado a una raíz de $G_1 \star G_2 \star G_3 \star \dots \star G_{n-1} \star G_n$, pero se está trabajando en el producto tensorial de los $\ell_2(V(G_i))$ relacionados con cada gráfica, además la raíz de la nueva gráfica constituye (por como se define el producto estrella dos a dos) haber pegado juntas las n -raíces, por ello:

$$P_* = P_1 \otimes \dots \otimes P_n.$$

Entonces:

$$\begin{aligned} & A(G_1 \star G_2 \star G_3 \star \dots \star G_{n-1} \star G_n \star G_{n+1}) \\ &= A(G_1 \star G_2 \star G_3 \star \dots \star G_{n-1} \star G_n) \otimes P_{n+1} + P_1 \otimes \dots \otimes P_n \otimes A(G_{n+1}). \end{aligned}$$

Por hipótesis de inducción, esto es similar a :

$$\left(\sum_{i=1}^n P_1 \otimes \dots \otimes P_{i-1} \otimes A(G_i) \otimes P_{i+1} \otimes \dots \otimes P_n \right) \otimes P_{n+1} + P_1 \otimes \dots \otimes P_n \otimes A(G_{n+1}).$$

Pero por el comportamiento del producto tensorial, se convierte en:

$$\sum_{i=1}^n P_1 \otimes \dots \otimes P_{i-1} \otimes A(G_i) \otimes P_{i+1} \otimes \dots \otimes P_n \otimes P_{n+1} + P_1 \otimes \dots \otimes P_n \otimes A(G_{n+1})$$

3. Productos de Gráficas

Simplificando:

$$\sum_{i=1}^{n+1} P_1 \otimes \cdots \otimes P_{i-1} \otimes A(G_i) \otimes P_{i+1} \otimes \cdots \otimes P_n \otimes P_{n+1}.$$

Lo que concluye la prueba. \square

3.6.2. Independencia Booleana

El tipo de independencia que se puede asociar al espacio de probabilidad algebraico, asociado a el álgebra C^* generado por el operador de adyacencia un producto estrella de gráficas es la independencia booleana.

Primero, hay que dar la siguiente:

Definición 3.6.2.1: Dado un espacio de probabilidad-* algebraico (A, φ) y una familia de conjuntos $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ tales que para cada λ , A_λ cumple con ser una subálgebra-* de A no necesariamente con uno.

Decimos que esta familia es **independiente en el sentido booleano** (con respecto a φ) si, para cualesquiera a_i en A_{λ_i} , con $1 \leq i \leq n$ y $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$; se tiene que :

$$\varphi(a_1 a_2 \cdots a_n) = \varphi(a_1) \varphi(a_2 \cdots a_n).$$

¿Cómo se traduce esto a funciones y elementos en espacios de Hilbert? La siguiente proposición arrojará luz al respecto:

Proposición 3.6.2.2: Dada k en $\{1, \dots, n\}$ sea H_k un espacio de Hilbert. Donde ξ_k es un vector distinguido y unitario de H_k . Considerese el espacio de probabilidad-* algebraico:

$$(\mathcal{B}(H_1 \otimes \cdots \otimes H_n), \psi).$$

Con $\psi = \psi_\xi$ como en la definición 3.3.1.1 y $\xi = \xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_n$.

Ahora sea P_i la proyección al generado de ξ_i y A_k el conjunto de operadores de la forma:

$$P_1 \otimes \cdots \otimes P_{k-1} \otimes T_k \otimes P_{k+1} \otimes \cdots \otimes P_n$$

con T_k perteneciente a $\mathcal{B}(H_k)$.

Entonces la familia $\{A_k\}_{1 \leq k \leq n}$ es independiente en el sentido booleano, con respecto al estado ψ_ξ .

Demostración: Se verá en primer lugar que para toda k en $\{1, \dots, n\}$, A_k es una subálgebra-*. Dados $a = P_1 \otimes \dots \otimes P_{k-1} \otimes T_k \otimes P_{k+1} \otimes \dots \otimes P_n$ y $b = P_1 \otimes \dots \otimes P_{k-1} \otimes S_k \otimes P_{k+1} \otimes \dots \otimes P_n$ en A_k se tiene que por la n-linealidad de este producto:

$$\begin{aligned} a + b &= P_1 \otimes \dots \otimes P_{k-1} \otimes T_k + S_k \otimes P_{k+1} \otimes \dots \otimes P_n \\ &= P_1 \otimes \dots \otimes P_{k-1} \otimes (T + S)_k \otimes P_{k+1} \otimes \dots \otimes P_n \end{aligned}$$

como $\mathcal{B}(H_k)$ es cerrado bajo sumas $(T + S)$ pertenece a $\mathcal{B}(H_k)$, por lo que $a + b$ está en A_k . De la misma manera, por como se comporta el producto tensorial en multiplicaciones y la cerradura de $\mathcal{B}(H_k)$ bajo composiciones, se puede probar de forma similar a como se hizo en la proposición 3.5.2.3 que ab pertenece a A_k . Además, por como se distribuye la toma de adjuntos en el producto tensorial:

$$\begin{aligned} a^* &= (P_1 \otimes \dots \otimes P_{k-1} \otimes T_k \otimes P_{k+1} \otimes \dots \otimes P_n)^* \\ &= P_1^* \otimes \dots \otimes P_{k-1}^* \otimes T_k^* \otimes P_{k+1}^* \otimes \dots \otimes P_n^*, \end{aligned}$$

pero las proyecciones son operadores autoadjuntos por lo que:

$$a^* = P_1 \otimes \dots \otimes P_{k-1} \otimes T_k^* \otimes P_{k+1} \otimes \dots \otimes P_n$$

y como T_k^* pertenece a $\mathcal{B}(H_k)$, entonces a^* está en A_k .

Ahora, hay que demostrar que esa familia es independiente en el sentido booleano.

Para simplificar la notación, considérese: $H = H_1 \otimes \dots \otimes H_n$. Entonces, sea $m \geq 2$ y sean $k_1 \neq k_2 \neq \dots \neq k_m$ en $\{1, 2, \dots, n\}$ y a_i en A_{k_i} , tales que $a_i = P_1 \otimes \dots \otimes P_{k_i-1} \otimes T_{k_i} \otimes P_{k_i+1} \otimes \dots \otimes P_n$ con T_{k_i} perteneciente a $\mathcal{B}(H_{k_i})$. Supongase sin pérdida de generalidad que $k_1 > k_2$, se tiene que:

$$\begin{aligned} a_2^* a_1^*(\xi) &= P_1 \otimes \dots \otimes P_{k_2-1} \otimes T_{k_2}^* P_{k_2} \otimes \dots \otimes P_{k_1} T_{k_1}^* \otimes P_{k_1+1} \dots \otimes P_n(\xi) = \\ &P_1(\xi_1) \otimes \dots \otimes P_{k_2-1}(\xi_{k_2-1}) \otimes T_{k_2}^*(\xi_{k_2}) \otimes \dots \otimes P_{k_1} T_{k_1}^*(\xi_{k_1}) \otimes P_{k_1+1}(\xi_{k_1+1}) \dots \otimes P_n(\xi_n). \end{aligned}$$

Además, se sabe que:

$$P_{k_1} T_{k_1}^*(\xi_{k_1}) = \langle T_{k_1}^*(\xi_{k_1}), (\xi_{k_1}) \rangle \xi_{k_1}.$$

Puesto que los operadores son proyecciones que se anulan fuera de un subespacio y por como se comporta el producto interior, lo anterior es igual a:

$$\langle T_{k_1}^*(\xi_{k_1}), \xi_{k_1} \rangle \xi_{k_1} = \langle T_{k_1}^*(\xi_{k_1}), \xi_{k_1} \rangle \langle \xi_1, \xi_1 \rangle \dots \langle \xi_n, \xi_n \rangle \xi_{k_1} =$$

3. Productos de Gráficas

$$\langle T_{k_1}^*(\xi_{k_1}), \xi_{k_1} \rangle \|\xi_1\| \cdots \|\xi_n\| \xi_{k_1} = \langle a_1^* \xi, \xi \rangle \xi_{k_1}.$$

Por lo que:

$$a_2^* a_1^*(\xi) = (\langle a_1^* \xi, \xi \rangle) (\xi_1 \otimes \cdots \otimes T_{k_2}^*(\xi_{k_2}) \otimes \cdots \otimes \xi_{k_1} \otimes \xi_n).$$

Por propiedades de los adjuntos y desarrollo anterior:

$$\begin{aligned} \langle a_1 a_2 \cdots a_m(\xi), \xi \rangle &= \langle a_3 \cdots a_m(\xi), a_2^* a_1^* \xi \rangle \\ &= \overline{\langle a_1^*(\xi), \xi \rangle} \langle a_3 \cdots a_m(\xi), a_2^* \xi \rangle = \langle a_1(\xi), \xi \rangle \langle a_3 \cdots a_m(\xi), a_2^* \xi \rangle \\ &= \langle a_1(\xi), \xi \rangle \langle a_2 a_3 \cdots a_m(\xi), \xi \rangle. \end{aligned}$$

Por lo que la familia $\{A_k\}_{1 \leq k \leq n}$, es independiente en el sentido booleano. \square

Relación Entre la Independencia Booleana y el Producto Estrella

El operador de adyacencia del producto estrella que se describió en la sección anterior, según la proposición 3.6.1.1 puede escribirse como :

$$A(G_1) \otimes P_2 + P_1 \otimes A(G_2).$$

En este caso particular, como (G_1, e_1) y (G_2, e_2) son gráficas con raíz: Considerese el espacio de probabilidad-* $(\mathcal{B}(\ell_2(V_1) \otimes \ell_2(V_2)), \psi)$.

Donde $\psi = \psi_{\delta e_1} \otimes \delta e_2$, como en la definición 3.3.1.1.

Los operadores $A(G_1) \otimes P_2$ y $P_1 \otimes A(G_2)$ son variables aleatorias en relación con este espacio. Por su estructura, considerando el caso $n = 2$, de la proposición anterior ambos son elementos de conjuntos tipo A_k , por lo que son independientes en el sentido booleano, con respecto al estado ψ .

Más aún, las descomposiciones en productos estrella con n factores dadas por la proposición 3.6.1.2, cumplen que al considerarse el espacio de probabilidad-* de la proposición con $H_i = \ell_2(V(G_i))$, cada factor pertenece a un conjunto A_k , como los descritos en la proposición 3.6.2.2, por lo que los n factores serán independientes en el sentido booleano, con respecto al estado ψ_ξ donde $\xi = \delta e_1 \otimes \cdots \otimes \delta e_n$.

Se remite al lector interesado en profundizar en resultados de este tema a [25].

3.7. El Producto Libre

Si hay un producto de gráficas que no tiene un análogo finito es el producto libre([23]), intuitivamente, después de haber definido y ejemplificado los productos peine y estrella, podríamos decir que es una combinación infinita y sucesiva de ambos.

En palabras más descriptivas, las de [23] para ser precisos, el producto libre de dos gráficas localmente finitas G y H , es una gráfica conexa hecha con copias de G y H , donde cualesquiera dos copias de G o H son disjuntas o tienen intersección en un vértice, por ende, todos sus vértices son vértices de corte.

Para definir de manera formal el producto libre, se seguirá la noción de [2], definiendose primeramente y de manera general, para n factores, otra noción.

Definición 3.7.1: Dadas n gráficas con raíz, (G_i, e_i) con $1 \leq i \leq n$ y el conjunto $V_i^0 = V(G_i) \setminus e_i$. Se define el **producto libre de un conjunto** con raíz como el conjunto con raíz $(\ast_{1 \leq i \leq n} V_i, e)$, donde:

$$\ast_{1 \leq i \leq n} V_i = \{e\} \cup \{v_1 v_2 \cdots v_m | v_k \in V_{i_k}^0 \text{ y } i_1 \neq i_2 \neq \cdots \neq i_m, m \in \mathbb{N}\}.$$

La longitud de una palabra w se denotará por $|w|$, e es la palabra vacía, cuya longitud es cero.

En el caso de que $n = 2$, este producto se denotará $V(G_1) \ast V(G_2)$.

Definición 3.7.2: Dadas dos gráficas con raíz (G_1, e_1) y (G_2, e_2) . Se define al **producto libre de gráficas con raíz**, como la gráfica con raíz $(G_1 \ast G_2, e)$ con el conjunto de vértices $V(G_1) \ast V(G_2)$ y el conjunto de aristas $E(G_1 \ast G_2)$. Donde:

$$E(G_1 \ast G_2) = \{\{uw, u'v\} | \{u, u'\} \in E(G_1) \cup E(G_2) \text{ y } v, uw, u'v \in V(G_1) \ast V(G_2)\}.$$

Como notación $ew = w$.

De la definición, dados dos vértices w y w' en $V(G_1 \ast G_2)$ estos serán adyacentes en cualquiera de los siguientes tres casos:

- a) Si $|w| = |w'| = m$, $m > 0$, y se tiene que $w = vu$, $w' = v'u$, con u una palabra de longitud $m - 1$ y $\{v, v'\}$ una arista en $E(G_1) \cup E(G_2)$.
- b) Si $w = e$, $|w'| = 1$ y $\{w', e_i\}$ es una arista de $E(G_i)$, para alguna i en $\{1, 2\}$; o bien $w' = e$, $|w| = 1$ y $\{w, e_i\}$ es una arista de $E(G_i)$, para alguna i en $\{1, 2\}$ (considerando a w y w' como vértices de las gráficas factor).

3. Productos de Gráficas

- c) Si $|w| = m$ y $|w'| = m + 1$ y $w = eu$, $w' = v'u$, con $\{e_i, v'\}$ en $E(G_i)$ para alguna i en $\{1, 2\}$; o $|w| = m + 1$ y $|w'| = m$ y $w = vu$, $w' = eu$, con $\{e_i, v\}$ en $E(G_i)$ para alguna i en $\{1, 2\}$.

Es importante observar que por la naturaleza del conjunto de vértices del producto libre, se utilizara $\{w, w'\}$ para denotar la arista entre los vértices w y w' .

Nota: El producto libre se define de esta manera, para que el producto libre de gráficas de Cayley (sección 1.8) coincida con la gráfica del producto libre de sus grupos asociados.

El siguiente ejemplo se basa en uno de [2]:

Ejemplo 3.7.3: Considerese (G_1, e_1) y (G_2, e_2) , en donde ambos son isomorfos a K_2 (es decir dos vértices y una arista que los une), donde $V(G_1) = \{w_1, e_1\}$ y $V(G_2) = \{w_2, e_2\}$.

Considerese la siguiente representación pictórica de $G_1 * G_2$ (ilustrativa solamente):

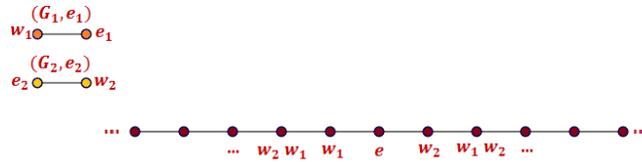


Figura 3.9: Producto libre de K_2 consigo mismo

Según la definición 3.7.2, $G_1 * G_2$ es la gráfica cuyo conjunto de vértices es

$$\begin{aligned} V(G_1) * V(G_2) &= \{e\} \cup \{v_1 \cdots v_m \mid v_k \in V_{i_k}^0, i_1 \neq \cdots \neq i_j \neq \cdots \neq i_m, m \in \mathbb{N}, i_j \in \{1, 2\}\} \\ &= \{e, w_1, w_2, w_1 w_2, w_2 w_1, w_1 w_2 w_1, \dots\} \end{aligned}$$

y cuyas aristas pertenecen al conjunto:

$$E(G_1 * G_2) = \{\{e, w_1\}, \{e, w_2\}, \{w_1, w_2 w_1\}, \{w_2, w_1 w_2\}, \{w_1 w_2, w_1 w_2 w_1\}, \dots\}.$$

Es importante observar que la finitud local de las gráficas factor garantiza la finitud local del producto libre de dos gráficas, lo que se hace manifiesto en el lema siguiente:

Lema 3.7.4: Dadas dos gráficas con raíz localmente finitas (G_1, e_1) , (G_2, e_2) y se tiene que

$$\Delta(G_1 * G_2) \leq \Delta(G_1) + \Delta(G_2).$$

Demostración: Dado w un vértice de $G_1 * G_2$, $w = e$ o w puede escribirse como una palabra $v_1 \dots v_m$ con v_k en los $V_{i_k}^0$ para $1 \leq k \leq m$. En el primer caso, e es adyacente a todas las palabras $v = (ev)$ y $u = (eu)$ de longitud, tales que v y u como vértices de las gráficas factor, eran adyacentes a e_1 en G_1 y a e_2 en G_2 respectivamente. Por lo que $\deg(e) \leq \Delta(G_1) + \Delta(G_2)$.

Si $w \neq e$, w es una palabra de longitud mayor o igual a uno y por la definición 3.7.1, se tiene que w se descompone en una palabra u de longitud $m - 1$ y una palabra v de longitud uno, o que $w = eu$ con u de longitud m , en cualquiera de los casos, por la definición 3.7.2 se tiene que w pertenece a lo más a tantas aristas como las que haya en $E(G_1) \cup E(G_2)$.

Por ambos casos y como w es cualquier vértice de $G_1 * G_2$, $\Delta(G_1) + \Delta(G_2)$ es una cota superior para el grado de todos los vértices del producto libre. De lo cual, se concluye que:

$$\Delta(G_1 * G_2) \leq \Delta(G_1) + \Delta(G_2). \square$$

3.7.1. Producto Libre de Espacios de Hilbert

Se define, como en [16] al producto de espacios de Hilbert como:

Definición 3.7.1.1: Dada una familia de espacios de Hilbert $\{(H_i, v_i)\}_{1 \leq i \leq n}$ donde v_i es un vector unitario distinguido de H_i , se define al **producto libre de espacios de Hilbert** como el espacio $*_{1 \leq i \leq n}(H_i, v_i)$ es (H, v) , dado por:

$$H = \mathbb{C}v \oplus \bigoplus_{m \geq 1} \left(\bigoplus_{i_1 \neq \dots \neq i_m} H_{i_1}^0 \otimes \dots \otimes H_{i_m}^0 \right),$$

donde los i_j pertenecen a $\{1, \dots, n\}$, H_i^0 es el complemento ortogonal de v_i en H_i y $\mathbb{C}v$ es el generado de v , y v es el vector unitario

Se considerará que el espacio en el que actúa el operador de adyacencia del producto libre de n gráficas con raíz (G_i, e_i) es el espacio de Hilbert H^* dado por $*_{1 \leq i \leq n} \ell_2(V(G_i), \delta_{v_i})$.

Se considerará que

$$*_{1 \leq i \leq n} \ell_2(V(G_i)) \simeq \ell_2(*_{1 \leq i \leq n} V(G_i)).$$

3. Productos de Gráficas

Lo que en el caso de $n = 2$ se traduce en el siguiente lema:

Lema 3.7.1.2: Existe un isomorfismo isométrico entre los espacios

$$(\ell_2(V(G_1)), \delta_{e_1}) * (\ell_2(V(G_2)), \delta_{e_2}) \text{ y } (\ell_2(V(G_1 * G_2)), \delta_e)$$

Demostración: Considerese la siguiente base ortonormal de $\ell_2(V(G_1 * G_2))$:

$$\beta_1 = \{\delta_e\} \cup \{\delta_w | w \in \bigcup_{m=1}^{\infty} W_m\}$$

donde W_m es el conjunto que contiene a las palabras de longitud m , formadas con elementos de V_1^0 y V_2^0 donde elementos consecutivos, de los m que conforman la palabra, pertenecen a conjuntos diferentes.

Considerese también la base ortonormal de $(\ell_2(V(G_1)), \delta_{e_1}) * (\ell_2(V(G_2)), \delta_{e_2})$:

$$\beta_2 = \{\xi\} \cup \{\delta_{u_1} \otimes \cdots \otimes \delta_{u_m} | m \text{ natural, } u_i \in V_{k_i}^0, \text{ con } k_1 \neq \cdots \neq k_m\}.$$

Se define $\varphi : \beta_1 \rightarrow \beta_2$ de la siguiente forma, para e raíz: $\varphi(\delta_e) = \xi$. Para $w \neq e$, como w pertenece a W_m , entonces $w = u_1 u_2 \cdots u_m$, con u_i en $V_{k_i}^0$, y los k_i consecutivos distintos, esta descomposición es única, pues w es una palabra con esos elementos. Siendo así, si $\varphi(\delta_w) = \delta_{u_1} \otimes \cdots \otimes \delta_{u_m}$, la función está bien definida para cada elemento de β_1 .

Además, dado γ_i^2 en β_2 , $\gamma_i^2 = \delta_{u_1} \otimes \cdots \otimes \delta_{u_m}$, con u_i en $V_{k_i}^0$, y los k_i distintos si son consecutivos, se tiene que $u_1 u_2 \cdots u_m$ es una palabra en W_m por lo cual haciendo $w = u_1 u_2 \cdots u_m$, $\varphi(\delta_w) = \delta_{u_1} \otimes \cdots \otimes \delta_{u_m} = \gamma_i^2$.

Como φ manda a β_1 a β_2 puede extenderse de manera lineal.

Al ser suprayectiva para los elementos de β_2 , la extensión será suprayectiva para cualquier elemento de $\ell_2(V(G_1), \delta_{e_1}) * \ell_2(V(G_2), \delta_{e_2})$.

φ es inyectiva, puesto que manda bases en bases, siendo su núcleo cero.

Para ver que es isométría, considérese un \bar{h} en $\ell_2(V(G_1 * G_2), \delta_e)$, como β_1 es base de ese espacio, se tiene que

$$\bar{h} = \sum_{n=1}^m \lambda_n \alpha_n$$

donde para cualquier n , α_n pertenece a β_1 y λ_n es un escalar. Si consideramos las norma de ambos espacios, usando el teorema de Pitágoras generalizado, se tiene que

$$\|\varphi(\bar{h})\| = \|\varphi(\sum_{n=1}^m \lambda_n \alpha_n)\| = \sum_{n=1}^m |\lambda_n| \|\varphi(\alpha_n)\| = \sum_{n=1}^m |\lambda_n| = \|\bar{h}\|.$$

Por lo que φ es una isometría, entonces, φ es un isomorfismo isométrico. \square

La siguiente proposición permitirá describir al producto libre de gráficas y su relación con la noción de independencia libre, es necesario, definir primeramente un tipo especial de conjuntos:

Definición 3.7.1.3: Dada una familia de espacios de Hilbert $\{(H_i, \xi_i)\}_{1 \leq i \leq n}$, ξ_i un vector unitario distinguido de H_i , se define el espacio:

$$K(i) = \mathbb{C}\xi \oplus \bigoplus_{m \geq 1} \left(\bigoplus_{i_1 \neq \dots \neq i_m} H_{i_1}^0 \otimes \dots \otimes H_{i_m}^0 \right),$$

donde los i_j pertenecen a $\{1, \dots, n\}$ y $i_1 \neq i$

Se tiene entonces la siguiente:

Proposición 3.7.1.4: Si $\{(H_i, \xi_i)\}_{1 \leq i \leq n}$ es una familia de espacios de Hilbert, con ξ_i es un vector unitario distinguido de H_i , y H su producto libre, con vector unitario distinguido ξ . Entonces H es isomorfo a $H_i \otimes K(i)$, para cualquier i en $\{1, \dots, n\}$.

Demostración: Observese primeramente que $H_i = \mathbb{C}\xi_i \oplus H_i^0$, por lo que $H_i \times K(i)$ puede verse como $\mathbb{C}\xi_i \times K(i) \oplus H_i^0 \times K(i)$, más aún $K(i) = \mathbb{C}\xi \oplus K(i)^0$, donde $K(i)^0$ es el complemento ortogonal de $\mathbb{C}\xi$ en $K(i)$. Por lo que

$$H_i \times K(i) = \mathbb{C}\xi_i \times \mathbb{C}\xi \oplus \mathbb{C}\xi_i \times K(i)^0 \oplus H_i^0 \times \mathbb{C}\xi \oplus H_i^0 \times K(i)^0. \quad (3.6)$$

Por lo cual, basta definir la transformación para elementos distinguidos de cada uno de los sumandos de la suma directa. Sean η_1 en H_i^0 y η_2 en $K(i)^0$ y λ, μ en \mathbb{C} .

Considerese $\hat{U}_i : H_i \times K(i) \rightarrow H$, definida de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \hat{U}_i((\lambda\xi_i, \mu\xi)) &= \lambda\mu\xi \\ \hat{U}_i((\lambda\xi_i, \eta_2)) &= \lambda\eta_2 \\ \hat{U}_i((\eta_1, \lambda\xi)) &= \lambda\eta_1 \\ \hat{U}_i((\eta_1, \eta_2)) &= \eta_1 \otimes \eta_2. \end{aligned}$$

De la argumentación anterior, la función \hat{U}_i está bien definida.

Es claro de la definición que \hat{U}_i es bilineal. También, \hat{U}_i es continua, ya que por ser lineal en cada entrada y por como se definió la función, se tiene que para cada par w_1, w_2 en $H_i \times K(i)$, $\|\hat{U}_i((w_1, w_2))\| \leq \|w_1\| \|w_2\|$, por lo que \hat{U}_i es

3. Productos de Gráficas

continua.

Entonces por la propiedad universal del producto tensorial, existe U_i lineal y acotada, tal que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} H_i \times K(i) & \xrightarrow{\tau} & H_i \otimes K(i) \\ & \searrow U_i & \downarrow U_i \\ & & H \end{array}$$

Como U_i es lineal y acotada, existe su adjunto $U_i^* : H \rightarrow H_i \otimes K(i)$.

Ahora se probará que U_i es unitaria.

Notese que dado h en H , h puede escribirse de una de las siguientes maneras:

- (i) $h = \lambda \xi$
- (ii) $h = \eta_{i_1} \otimes \eta_{i_2} \otimes \cdots \otimes \eta_{i_m}$, con $i_1 = i$, η_{i_j} en H_{i_j} , m un natural. Es decir $h = \eta_2 \otimes \eta_1$, con η_1 en H_i^0 y η_2 en $K(i)^0$;
- (iii) $h = \eta_{i_1} \otimes \eta_{i_2} \otimes \cdots \otimes \eta_{i_m}$, pero $i_1 \neq i$, η_{i_j} en H_{i_j} , m en \mathbb{N} , es decir $h = \eta'_2$ con η'_2 en $K(i)^0$.
- (iv) $h = \eta_1$, con η'_1 en H_i^0 .

Se define la función W_i para los tensores fundamentales de H como sigue:

$$\begin{aligned} W_i(\xi) &= \xi_i \otimes \xi \\ W_i(\eta'_2) &= \xi_i \otimes \eta'_2 \\ W_i(\eta'_1) &= \eta'_1 \otimes \xi \\ W_i(\eta'_1 \otimes \eta'_2) &= \eta'_1 \otimes \eta'_2 \end{aligned}$$

Así, de forma similar a \hat{U}_i , W_i está bien definida y es continua.

Además, el producto interior de los tensores fundamentales de $H_i \otimes K(i)$ y los elementos distinguidos de H , se comporta como puede observarse en la tablas siguientes:

x en $H_i \otimes K(i)$ / y en H	ξ
$\xi_i \otimes \xi$	$\langle U_i(\xi_i \otimes \xi), \xi \rangle = \langle \xi, \xi \rangle = 1$
$\xi_i \otimes \eta_2$	$\langle U_i(\xi_i \otimes \eta_2), \xi \rangle = \langle \eta_2, \xi \rangle = 0$
$\eta_1 \otimes \xi$	$\langle U_i(\eta_1 \otimes \xi), \xi \rangle = \langle \eta_1, \xi \rangle = 0$
$\eta_1 \otimes \eta_2$	$\langle U_i(\eta_1 \otimes \eta_2), \xi \rangle = \langle \eta_1 \otimes \eta_2, \xi \rangle = 0$

3.7. El Producto Libre

x en $H_i \otimes K(i)$ / y en H	η'_2
$\xi_i \otimes \xi$	$\langle U_i(\xi_i \otimes \xi), \eta'_2 \rangle = \langle \xi, \eta'_2 \rangle = 0$
$\xi_i \otimes \eta_2$	$\langle U_i(\xi_i \otimes \eta_2), \eta'_2 \rangle = \langle \eta_2, \eta'_2 \rangle$
$\eta_1 \otimes \xi$	$\langle U_i(\eta_1 \otimes \xi), \eta'_2 \rangle = \langle \eta_1, \eta'_2 \rangle = 0$
$\eta_1 \otimes \eta_2$	$\langle U_i(\eta_1 \otimes \eta_2), \eta'_2 \rangle = \langle \eta_1 \otimes \eta_2, \eta'_2 \rangle = 0$

x en $H_i \otimes K(i)$ / y en H	η'_1
$\xi_i \otimes \xi$	$\langle U_i(\xi_i \otimes \xi), \eta'_1 \rangle = \langle \xi, \eta'_1 \rangle = 0$
$\xi_i \otimes \eta_2$	$\langle U_i(\xi_i \otimes \eta_2), \eta'_1 \rangle = \langle \eta_2, \eta'_1 \rangle = 0$
$\eta_1 \otimes \xi$	$\langle U_i(\eta_1 \otimes \xi), \eta'_1 \rangle = \langle \eta_1, \eta'_1 \rangle$
$\eta_1 \otimes \eta_2$	$\langle U_i(\eta_1 \otimes \eta_2), \eta'_1 \rangle = \langle \eta_1 \otimes \eta_2, \eta'_1 \rangle = 0$

x en $H_i \otimes K(i)$ / y en H	$\eta'_1 \otimes \eta'_2$
$\xi_i \otimes \xi$	$\langle U_i(\xi_i \otimes \xi), \eta'_1 \otimes \eta'_2 \rangle = \langle \xi, \eta'_1 \otimes \eta'_2 \rangle = 0$
$\xi_i \otimes \eta_2$	$\langle U_i(\xi_i \otimes \eta_2), \eta'_1 \otimes \eta'_2 \rangle = \langle \eta_2, \eta'_1 \otimes \eta'_2 \rangle = 0$
$\eta_1 \otimes \xi$	$\langle U_i(\eta_1 \otimes \xi), \eta'_1 \otimes \eta'_2 \rangle = \langle \eta_1, \eta'_1 \otimes \eta'_2 \rangle = 0$
$\eta_1 \otimes \eta_2$	$\langle U_i(\eta_1 \otimes \eta_2), \eta'_1 \otimes \eta'_2 \rangle = \langle \eta_1 \otimes \eta_2, \eta'_1 \otimes \eta'_2 \rangle$

Comparense ahora las tablas anteriores, con las obtenidas para W_i :

x en $H_i \otimes K(i)$ / y en H	ξ
$\xi_i \otimes \xi$	$\langle \xi_i \otimes \xi, W_i(\xi) \rangle = \langle \xi_i \otimes \xi, \xi_i \otimes \xi \rangle = 1$
$\xi_i \otimes \eta_2$	$\langle \xi_i \otimes \eta_2, W_i(\xi) \rangle = \langle \xi_i \otimes \eta_2, \xi_i \otimes \xi \rangle = 0$
$\eta_1 \otimes \xi$	$\langle \eta_1 \otimes \xi, W_i(\xi) \rangle = \langle \eta_1 \otimes \xi, \xi_i \otimes \xi \rangle = 0$
$\eta_1 \otimes \eta_2$	$\langle \eta_1 \otimes \eta_2, W_i(\xi) \rangle = \langle \eta_1 \otimes \eta_2, \xi_i \otimes \xi \rangle = 0$

3. Productos de Gráficas

x en $H_i \otimes K(i)$ / y en H	η'_2
$\xi_i \otimes \xi$	$\langle \xi_i \otimes \xi, W_i(\eta'_2) \rangle = \langle \xi_i \otimes \xi, \xi_i \otimes \eta'_2 \rangle = \langle \xi, \eta'_2 \rangle = 0$
$\xi_i \otimes \eta_2$	$\langle \xi_i \otimes \eta_2, W_i(\eta'_2) \rangle = \langle \xi_i \otimes \eta_2, \xi_i \otimes \eta'_2 \rangle = \langle \eta_2, \eta'_2 \rangle$
$\eta_1 \otimes \xi$	$\langle \eta_1 \otimes \xi, W_i(\eta'_2) \rangle = \langle \eta_1 \otimes \xi, \xi_i \otimes \eta'_2 \rangle = 0$
$\eta_1 \otimes \eta_2$	$\langle \eta_1 \otimes \eta_2, W_i(\eta'_2) \rangle = \langle \eta_1 \otimes \eta_2, \xi_i \otimes \eta'_2 \rangle = \langle \eta_1, \xi_i \rangle = 0$

x en $H_i \otimes K(i)$ / y en H	η'_1
$\xi_i \otimes \xi$	$\langle \xi_i \otimes \xi, W_i(\eta'_1) \rangle = \langle \xi_i \otimes \xi, \eta'_1 \otimes \xi \rangle = \langle \xi_i, \eta'_1 \rangle = 0$
$\xi_i \otimes \eta_2$	$\langle \xi_i \otimes \eta_2, W_i(\eta'_1) \rangle = \langle \xi_i \otimes \eta_2, \eta'_1 \otimes \xi \rangle = 0$
$\eta_1 \otimes \xi$	$\langle \eta_1 \otimes \xi, W_i(\eta'_1) \rangle = \langle \eta_1 \otimes \xi, \eta'_1 \otimes \xi \rangle = \langle \eta_1, \eta'_1 \rangle$
$\eta_1 \otimes \eta_2$	$\langle \eta_1 \otimes \eta_2, W_i(\eta'_1) \rangle = \langle \eta_1 \otimes \eta_2, \eta'_1 \otimes \xi \rangle = \langle \eta_2, \xi \rangle = 0$

x en $H_i \otimes K(i)$ / y en H	$\eta'_1 \otimes \eta'_2$
$\xi_i \otimes \xi$	$\langle \xi_i \otimes \xi, W_i(\eta'_1 \otimes \eta'_2) \rangle = \langle \xi_i \otimes \xi, \eta'_1 \otimes \eta'_2 \rangle = 0$
$\xi_i \otimes \eta_2$	$\langle \xi_i \otimes \eta_2, W_i(\eta'_1 \otimes \eta'_2) \rangle = \langle \xi_i \otimes \eta_2, \eta'_1 \otimes \eta'_2 \rangle = 0$
$\eta_1 \otimes \xi$	$\langle \eta_1 \otimes \xi, W_i(\eta'_1 \otimes \eta'_2) \rangle = \langle \eta_1 \otimes \xi, \eta'_1 \otimes \eta'_2 \rangle = 0$
$\eta_1 \otimes \eta_2$	$\langle \eta_1 \otimes \eta_2, W_i(\eta'_1 \otimes \eta'_2) \rangle = \langle \eta_1 \otimes \eta_2, \eta'_1 \otimes \eta'_2 \rangle = \langle \eta_1, \eta'_1 \rangle$

Como es posible observar, en los dieciséis casos $\langle U_i(x), y \rangle = \langle x, W_i(y) \rangle$, para los elementos distinguidos de $H_i \otimes K(i)$ y H , por ende esta igualdad se mantiene para los elementos de sus respectivas bases, y por la bilinealidad del producto interior, se tiene que coinciden para cualquier x en $H_i \otimes K(i)$ y y en H , por la unicidad del adjunto $W_i = U_i^*$, pero además para cualquier elemento $U_i^*U_i(x) = x$, entonces, U_i es un operador unitario.

Por lo cual U_i es invertible y $\|U_i\| = 1$, por lo que H y $H_i \otimes K(i)$ son isometricamente isomorfos. \square .

Definición 3.7.1.5: Se define $\lambda_i : \mathcal{B}(H_i) \rightarrow \mathcal{B}(H)$, tal que para T en $\mathcal{B}(H_i)$:

$$\lambda_i(T) = U_i(T \otimes I)U_i^*,$$

donde I es la identidad en $K(i)$.

Observación 3.7.1.6: Es claro que λ_i es lineal. Además, si T pertenece al núcleo de λ_i , $U_i(T \otimes I)U_i^* = 0$ para toda h en H , como U_i y U_i^* son unitarios, $0 = U_i^*U_i(T \otimes I)U_i^*U_i = (T \otimes I)$, de donde T es el operador cero. De esto, se tiene que λ_i es un monomorfismo de álgebras C^* .

También, para toda T en $\mathcal{B}(H_i)$ se cumple que:

$$\|U_i(T \otimes I)U_i^*\| \leq \|U_i\| \|(T \otimes I)\| \|U_i^*\| = \|(T \otimes I)\| = \|T\| \|I\| = \|T\|.$$

Y para I_{H_1} se tiene que:

$$\|U_i(I_{H_1} \otimes I)U_i^*\| = 1 = \|I\|,$$

por lo cual λ_i preserva normas.

Observación 3.7.1.7: Dado los estados $\varphi : \mathcal{B}(H) \rightarrow \mathbb{C}$, tal que para T lineal y acotada $\varphi(T) = \langle T(\xi), \xi \rangle$ y $\varphi_i : \mathcal{B}(H_i) \rightarrow \mathbb{C}$ que para cualquier T en el dominio, cumple que $\varphi_i(T) = \langle T(\xi_i), \xi_i \rangle$. Donde ξ y ξ_i son vectores unitarios distinguidos de H y H_i respectivamente.

Se tiene que para T en $\mathcal{B}(H_i)$, $\varphi(\lambda_i(T)) = \varphi_i(T)$.

Pues por como se definió λ_i :

$$\varphi(\lambda_i(T)) = \langle U_i(T \otimes I)U_i^*(\xi), \xi \rangle$$

Por aplicando una de las propiedades de los adjuntos a lo anterior, se tiene que:

$$\begin{aligned} \langle (T \otimes I)U_i^*(\xi), U_i^*\xi \rangle &= \langle (T \otimes I)(\xi_i \otimes \xi), \xi_i \otimes \xi \rangle = \langle T(\xi_i) \otimes (\xi), \xi_i \otimes \xi \rangle = \langle T(\xi_i), \xi_i \rangle \langle \xi, \xi \rangle \\ &= \langle T(\xi_i), \xi_i \rangle = \varphi(T). \end{aligned}$$

De lo cual, las funciones λ_i preservan las distribuciones relacionadas con estados dados por vectores unitarios.

3.7.2. Independencia Libre

La independencia libre se define, basandose en [16], como sigue:

Definición 3.7.2.1: Dado un espacio de probabilidad-* (A, φ) , I un conjunto de índices y para cada i en I , sea A_i una subálgebra-* con unidad. Decimos que la familia de subálgebras $\{A_i\}_{i \in I}$ es **independiente en el sentido libre**, con respecto a φ , si dado m un entero positivo, al considerar $i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_k \neq \dots \neq$

3. Productos de Gráficas

i_m y a_k un elemento de A_{i_k} para cada k en $\{1, \dots, m\}$ se tiene que si $\varphi(a_k) = 0$ para toda k en $\{1, \dots, m\}$ entonces

$$\varphi(a_1 a_2 \cdots a_m) = 0.$$

Ahora se considerara la siguiente:

Proposición 3.7.2.2: Dada una familia $\{(A_i, \varphi_i)\}_{1 \leq i \leq n}$ de espacios de probabilidad, donde para cada i , $A_i \subset \mathcal{B}(H_i)$, es una subálgebra C^* con uno y para a en A_i , $\varphi_i(a) = \langle a\xi_i, \xi_i \rangle$, con ξ_i un vector unitario distinguido de H_i . Considerando a (H, ξ) el producto libre de los espacios de Hilbert (H_i, ξ_i) , para $1 \leq i \leq n$ y λ_i como en la definición 3.7.1.5.

Entonces la familia $\{\lambda_i(A_i)\}_{i=1}^n$ es libre respecto a φ , donde $\varphi(T) = \langle T(\xi), \xi \rangle$. Es importante recordar que por la observación 3.7.1.6, para cada i , $\lambda_i(A_i)$ es una subálgebra de $\mathcal{B}(H)$.

Demostración: Considerense los índices $i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_m$, con i_j en $\{1, \dots, n\}$, para cualquier j entre 1 y m .

Para cada i_j tomese $\lambda_{i_j}(T_{i_j})$ en A_{i_j} y supongase que $\varphi(\lambda_{i_j}(T_{i_j})) = 0$ para toda j en $\{1, \dots, m\}$.

Primeramente, notese que

$$\lambda_{i_j}(T_{i_j})(\xi) = U_{i_j}(T_{i_j} \otimes I)U_{i_j}^*(\xi) = U_{i_j}(T_{i_j} \otimes I)(\xi_{i_j} \otimes \xi) = U_{i_j}(T_{i_j}(\xi_{i_j}) \otimes I(\xi)) = T_{i_j}(\xi_{i_j})$$

Pero, entonces se tiene que

$$\langle T_{i_j}(\xi_{i_j}), \xi_{i_j} \rangle = \langle \lambda_{i_j}(T_{i_j})(\xi), \xi_{i_j} \rangle = 0.$$

De lo cual $T_{i_j}(\xi_{i_j})$ pertenece al conjunto $H_{i_j}^0$.

Ahora, se afirma que:

$$(\lambda_{i_1}(T_{i_1}) \cdots \lambda_{i_m}(T_{i_m}))(\xi) = T_{i_1}(\xi_{i_1}) \otimes \cdots \otimes T_{i_m}(\xi_{i_m}).$$

Para probar la afirmación, se recurrirá a inducción sobre m la cantidad de elementos de las álgebras de la forma $\lambda_{i_j}(T_{i_j})$. Para el caso $m = 1$, se tiene que

$$\lambda_{i_m}(T_{i_m})(\xi) = U_{i_m}(T_{i_m} \otimes I)U_{i_m}^*(\xi) = T_{i_m}(\xi_{i_m}).$$

Si $m = 2$, considérese $\gamma = \lambda_{i_m}(T_{i_m})(\xi)$, entonces

$$\lambda_{i_{m-1}}(T_{i_{m-1}})(\gamma) = U_{i_{m-1}}(T_{i_{m-1}} \otimes I)U_{i_{m-1}}^*(\gamma)$$

Pero γ pertenece a $H_{i_m}^0$, por lo que $U_{i_{m-1}}^*(\gamma) = \xi_{i_{m-1}} \otimes \gamma$.

Entonces:

$$U_{i_{m-1}}(T_{i_{m-1}} \otimes I)U_{i_{m-1}}^*(\gamma) = U_{i_{m-1}}(T_{i_{m-1}} \otimes I)(\xi_{i_{m-1}} \otimes \gamma) = T_{i_{m-1}}(\xi_{i_{m-1}}) \otimes \gamma$$

Pero $T_{i_{m-1}}(\xi_{i_{m-1}})$ vive en $H_{i_{m-1}}^0$, por como se definió $U_{i_{m-1}}$, se tiene que:

$$\begin{aligned} T_{i_{m-1}}(\xi_{i_{m-1}}) \otimes \gamma &= T_{i_{m-1}}(\xi_{i_{m-1}}) \otimes \gamma = T_{i_{m-1}}(\xi_{i_{m-1}}) \otimes \lambda_{i_m}(T_{i_m})(\xi) \\ &= T_{i_{m-1}}(\xi_{i_{m-1}}) \otimes T_{i_m}(\xi_{i_m}). \end{aligned}$$

Ahora supongase que es válido para $m = n - 1$, y considérese $\gamma = \lambda_{i_2}(T_{i_2}) \cdots \lambda_{i_m}(T_{i_m})(\xi)$, por lo cual γ pertenece a $K(i_1)^0$.

$$\begin{aligned} \lambda_{i_1}(T_{i_1})(\gamma) &= U_{i_1}(T_{i_1} \otimes I)U_{i_1}^*(\gamma) = U_{i_1}(T_{i_1} \otimes I)(\xi_{i_1} \otimes \gamma) = U_{i_1}(T_{i_1}(\xi_{i_1}) \otimes \gamma) \\ &= T_{i_1}(\xi_{i_1}) \otimes \gamma = T_{i_1}(\xi_{i_1}) \otimes \lambda_{i_2}(T_{i_2}) \cdots \lambda_{i_m}(T_{i_m})(\xi). \end{aligned}$$

Que por hipótesis de inducción no es más que:

$$T_{i_1}(\xi_{i_1}) \otimes T_{i_2}(\xi_{i_2}) \otimes \cdots \otimes T_{i_m}(\xi_{i_m})$$

con lo que se prueba la afirmación.

Como ya se probó que para toda i_j en el conjunto de índices, T_{i_j} pertenece a $H_{i_j}^0$, entonces

$$T_{i_1}(\xi_{i_1}) \otimes T_{i_2}(\xi_{i_2}) \otimes \cdots \otimes T_{i_m}(\xi_{i_m})$$

pertenece a $\bigoplus_{i_1 \neq \cdots \neq i_m} H_{i_1}^0 \otimes \cdots \otimes H_{i_m}^0$.

Como H se descompone como suma directa de la siguiente forma:

$$H = \mathbb{C}\xi \oplus \bigoplus_{m \geq 1} \left(\bigoplus_{i_1 \neq \cdots \neq i_m} H_{i_1}^0 \otimes \cdots \otimes H_{i_m}^0 \right).$$

Entonces $T_{i_1}(\xi_{i_1}) \otimes T_{i_2}(\xi_{i_2}) \otimes \cdots \otimes T_{i_m}(\xi_{i_m})$ es ortogonal a ξ .

Por lo cual:

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda_{i_1}(T_{i_1}) \cdots \lambda_{i_m}(T_{i_m})) &= \langle \lambda_{i_1}(T_{i_1}) \cdots \lambda_{i_m}(T_{i_m})(\xi), \xi \rangle = \langle T_{i_1}(\xi_{i_1}) \otimes \cdots \otimes T_{i_m}(\xi_{i_m}), \xi \rangle \\ &= 0. \square \end{aligned}$$

Después de este resultado, ya es posible analizar la relación existente entre este tipo de independencia y el producto libre de gráficas.

3. Productos de Gráficas

3.7.3. Relación Entre el Producto Libre de Gráficas y la Independencia Libre

Por el lema 3.7.4, se sabe que el operador de adyacencia del producto libre está bien definido y por el lema 3.7.1.2 es posible asumir que el espacio sobre el cual actúa es $\ell_2(V(G_1), \delta_{e_1}) * \ell_2(V(G_2), \delta_{e_2})$.

Es posible dar una descomposición de dicho operador de adyacencia, en el caso general de n factores, como puede consultarse en [2], sin embargo, en la presente, sólo se realizará para el producto libre de dos gráficas.

Una manera de relacionar la independencia libre con el producto libre de gráficas está explícita en la siguiente:

Proposición 3.7.2.1: Dadas dos gráficas (G_1, e_1) y (G_2, e_2) gráficas localmente finitas, si (G, e) denota a $(G_1 * G_2, e)$.

Entonces, se cumplen:

- (i) $A_G = A^{(1)} + A^{(2)}$, donde $A^{(1)}$ y $A^{(2)}$ son elementos de $\mathcal{B}(\ell_2(V(G)))$, tales que para toda k natural, $\langle (A^{(i)})^k \delta_e, \delta_e \rangle = \langle A_{G_i}^k \delta_{e_i}, \delta_{e_i} \rangle$ para $1 \leq i \leq 2$.
- (ii) Las álgebras C^* generadas por $\{A^{(1)}, I\}$ y $\{A^{(2)}, I\}$, son libres con respecto a φ , donde $\phi(T) = \langle T \delta_e, \delta_e \rangle$.

Demostración: Para (i):

Como por el lema 3.7.1.2 existe un isomorfismo isométrico entre los espacios $(\ell_2(V(G)), \delta_e)$ y $(\ell_2(V(G_1)), \delta_{e_1}) * (\ell_2(V(G_2)), \delta_{e_2})$, al que denotaremos ψ (que debe por ello ser una transformación unitaria), se propone $A^{(i)} = \psi^* \lambda_i(A(G_i)) \psi$, para i en $\{1, 2\}$. Así definido, $A^{(i)}$ es un operador acotado en $\ell_2(V(G))$.

Ahora sean δ_{w_1} y δ_{w_2} en $\ell_2(V(G))$, con w_1 y w_2 vértices de G , por lo cual, $w_1 = v_1^1 \dots v_{k_1}^1$ y $w_2 = v_1^2 \dots v_{k_2}^2$, k_1, k_2 naturales, con $v_k^i \in V_{i_k}^0$ y $i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_m, m \in \mathbb{N}$.

$\langle A_G(\delta_{w_1}), \delta_{w_2} \rangle$ da la entrada $w_1 w_2$ de la matriz asociada al operador A_G , en otras palabras, será uno si w_1 y w_2 son adyacentes y cero en caso contrario.

Si son adyacentes y ni $w_1 \neq e \neq w_2$ entonces se tiene la siguiente descomposición:

$w_1 = v_1^1 u$ y $w_2 = v_1^2 u$, con u en $V(G)$ y $\{v_1^1, v_1^2\}$ una arista de G_1 o de G_2 , es

claro por la definición, que no puede ser arista de ambas gráficas.

Supongase que $\{v_1^1, v_1^2\}$ es una arista de G_1 , entonces:

$$\langle A^{(1)}(\delta_{w_1}), \delta_{w_2} \rangle = \langle \psi^* \lambda_i(A(G_i))\psi(\delta_{w_1}), \delta_{w_2} \rangle = \langle \lambda_i(A(G_i))\psi(\delta_{w_1}), \psi(\delta_{w_2}) \rangle.$$

Pero ψ es el isomorfismo del lema 3.7.1.2, por lo que $\psi(\delta_{w_1}) = \delta_{v_1}^1 \otimes \cdots \otimes \delta_{v_{m_1}}^1$ y $\psi(\delta_{w_2}) = \delta_{v_1}^2 \otimes \cdots \otimes \delta_{v_{m_2}}^2$.

Entonces:

$$\langle \lambda_1(A(G_1))\psi(\delta_{w_1}), \psi(\delta_{w_2}) \rangle = \langle \lambda_1(A(G_1))(\delta_{v_1}^1 \otimes \cdots \otimes \delta_{v_{m_1}}^1), \delta_{v_1}^2 \otimes \cdots \otimes \delta_{v_{m_2}}^2 \rangle,$$

por como se definió a λ_i esto es igual a:

$$\begin{aligned} & \langle U_1(A_{G_1} \otimes I)U_1^*(\delta_{v_1}^1 \otimes \cdots \otimes \delta_{v_{m_1}}^1), \delta_{v_1}^2 \otimes \cdots \otimes \delta_{v_{m_2}}^2 \rangle \\ &= \langle (A_{G_1} \otimes I)U_1^*(\delta_{v_1}^1 \otimes \cdots \otimes \delta_{v_{m_1}}^1), U_1^*(\delta_{v_1}^2 \otimes \cdots \otimes \delta_{v_{m_2}}^2) \rangle, \end{aligned}$$

como $\psi(\delta_{w_1})$ y $\psi(\delta_{w_2})$ son tensores de la forma $\eta_1 \otimes \eta_2$ con η_1 en H_1^0 y η_2 en $K(i)$. Luego:

$$\begin{aligned} & \langle (A_{G_1} \otimes I)U_1^*(\delta_{v_1}^1 \otimes \cdots \otimes \delta_{v_{m_1}}^1), U_1^*(\delta_{v_1}^2 \otimes \cdots \otimes \delta_{v_{m_2}}^2) \rangle \\ &= \langle (A_{G_1} \otimes I)(\delta_{v_1}^1 \otimes \cdots \otimes \delta_{v_{m_1}}^1), (\delta_{v_1}^2 \otimes \cdots \otimes \delta_{v_{m_2}}^2) \rangle \\ &= \langle (A_{G_1})(\delta_{v_1}^1) \otimes (\delta_{v_1}^1 \otimes \cdots \otimes \delta_{v_{m_1}}^1), (\delta_{v_1}^2 \otimes \cdots \otimes \delta_{v_{m_2}}^2) \rangle \\ &= \langle (A_{G_1})(\delta_{v_1}^1), \delta_{v_1}^2 \rangle \langle \delta_{v_2}^1, \delta_{v_2}^2 \rangle \cdots \langle \delta_{v_{m_1}}^1, \delta_{v_{m_2}}^2 \rangle = \langle (A_{G_1})(\delta_{v_1}^1), \delta_{v_1}^2 \rangle = 1. \end{aligned}$$

De forma análoga, si $\{v_1^1, v_1^2\}$ es arista de G_2 , entonces:

$$\langle A^{(2)}(\delta_{w_1}), \delta_{w_2} \rangle = \langle (A_{G_1})(\delta_{v_1}^1), \delta_{v_1}^2 \rangle = 1.$$

Por otra parte si

$$\langle A_G(\delta_{w_1}), \delta_{w_2} \rangle = 0$$

entonces $\{w_1, w_2\}$ no es una arista de G , por lo que $\{v_1^1, v_1^2\}$ no es una arista de G_1 ni de G_2 , entonces:

$$\langle A^{(1)}(\delta_{w_1}), \delta_{w_2} \rangle + \langle A^{(2)}(\delta_{w_1}), \delta_{w_2} \rangle = \langle (A_{G_1})(\delta_{v_1}^1), \delta_{v_1}^2 \rangle + \langle (A_{G_2})(\delta_{v_1}^1), \delta_{v_1}^2 \rangle = 0.$$

Un segundo caso, es aquel en que $w_1 = e$ y $w_2 \neq e$ (o viceversa), se tiene entonces $w_2 = v_1^2 \dots v_{k_2}^2$, k_2 natural, con $v_k^i \in V_{i_k}^0$ y $i_1 \neq i_2 \neq \cdots \neq i_m, m \in \mathbb{N}$. Si $\langle A_G(\delta_e), \delta_{w_2} \rangle = 1$, entonces e y w_2 son adyacentes, por lo que se tiene la siguiente descomposición:

3. Productos de Gráficas

$w_2 = v_1^2, y \{e_i, v_1^2\}$ una arista de G_i para $i = 1$ o $i = 2$ exclusivamente:

Si $\{e_1, v_1^2\}$ es una arista de G_1 , entonces:

$$\begin{aligned} \langle A^{(1)}(\delta_e), \delta_{w_2} \rangle &= \langle \psi^* \lambda_1(A(G_1)) \psi(\delta_e), \delta_{w_2} \rangle = \langle \lambda_1(A(G_1)) \psi(\delta_e), \psi(\delta_{w_2}) \rangle \\ &= \langle \lambda_1(A(G_1))(\xi), \delta_{v_1}^2 \rangle = \langle U_1(A_{G_1} \otimes I) U_1^*(\delta_e), \delta_{v_1}^2 \rangle \\ &= \langle (A_{G_1} \otimes I) U_1^*(\xi), U_1^*(\delta_{v_1}^2) \rangle, \end{aligned}$$

donde ξ es el vector distinguido de $(\ell_2((V(G_1))), \delta_1) * (\ell_2((V(G_2))), \delta_2)$.

Se tiene que:

$$\begin{aligned} \langle (A_{G_1} \otimes I) U_1^*(\xi), U_1^*(\delta_{v_1}^2) \rangle &= \langle (A_{G_1} \otimes I)(\xi_1 \otimes \xi), (\delta_{v_1}^2 \otimes \xi) \rangle \\ &= \langle (A_{G_1})(\delta_{e_1} \otimes \xi), (\delta_{v_1}^2 \otimes \xi) \rangle \\ &= \langle (A_{G_1})(\delta_{e_1}), \delta_{v_1}^2 \rangle \langle \xi, \xi \rangle = \langle (A_{G_1})(\delta_{e_1}), \delta_{v_1}^2 \rangle = 1. \end{aligned}$$

Análogamente, si $\{e_2, v_1^2\}$ es arista de G_2 , entonces:

$$\langle A^{(2)}(\delta_{w_1}), \delta_{w_2} \rangle = \langle (A_{G_2})(\delta_{e_2}), \delta_{v_1}^2 \rangle = 1.$$

Por otra parte si

$$\langle A_G(\delta_e), \delta_{w_2} \rangle = 0$$

entonces $\{e, w_2\}$ no es una arista de G , por lo que $\{e_i, v_1^2\}$ no es una arista de G_1 ni de G_2 , entonces

$$\langle A^{(1)}(\delta_e), \delta_{w_2} \rangle + \langle A^{(2)}(\delta_{w_1}), \delta_{w_2} \rangle = \langle (A_{G_1})(\delta_{e_1}), \delta_{v_1}^2 \rangle + \langle (A_{G_2})(\delta_{e_2}), \delta_{v_1}^2 \rangle = 0.$$

El último caso se da cuando $w_1 = e$ y $w_2 = e$, de la definición se tiene que w_1 no es adyacente a w_2 y $\langle A_G(\delta_{w_1}), \delta_{w_2} \rangle = 0$.

Además:

$$\begin{aligned} \langle A^{(1)}(\delta_e), \delta_e \rangle + \langle A^{(2)}(\delta_e), \delta_e \rangle &= \langle \psi^* \lambda_1(A(G_1)) \psi(\delta_e), \delta_e \rangle + \langle \psi^* \lambda_2(A(G_2)) \psi(\delta_e), \delta_e \rangle \\ &= \langle \lambda_1(A(G_1)) \psi(\delta_e), \psi(\delta_e) \rangle + \langle \lambda_2(A(G_2)) \psi(\delta_e), \psi(\delta_e) \rangle \\ &= \langle \lambda_1(A(G_1))(\xi), (\xi) \rangle + \langle \lambda_2(A(G_2))(\xi), (\xi) \rangle \\ &= \langle U_1^*(A(G_1) \otimes I) U_1(\xi), (\xi) \rangle + \langle U_2^*(A(G_2) \otimes I) U_2(\xi), (\xi) \rangle \\ &= \langle (A(G_1) \otimes I) U_1(\xi), U_1(\xi) \rangle + \langle (A(G_2) \otimes I) U_2(\xi), U_2(\xi) \rangle \\ &= \langle (A(G_1) \otimes I)(\xi_1 \otimes \xi), (\xi_1 \otimes \xi) \rangle + \langle (A(G_2) \otimes I)(\xi_2 \otimes \xi), (\xi_2 \otimes \xi) \rangle = 0. \end{aligned}$$

Por lo que en cualquier caso:

$$\langle A_G(\delta_{w_1}), \delta_{w_2} \rangle = \langle A^{(1)}(\delta_{w_1}), \delta_{w_2} \rangle + \langle A^{(2)}(\delta_{w_1}), \delta_{w_2} \rangle.$$

Ahora, se probará por inducción que:

$$(\psi^* U_i(A_{G_i} \otimes I) U_i^* \psi)^k = \psi^* U_i(A_{G_i} \otimes I)^k U_i^* \psi.$$

Dado i en $\{1, 2\}$, obsérvese que:

$$(\psi^* U_i(A_{G_i} \otimes I) U_i^* \psi)^2 = \psi^* U_i(A_{G_i} \otimes I) U_i^* \psi \psi^* U_i(A_{G_i} \otimes I) U_i^* \psi = \psi^* U_i((A_{G_i})^2 \otimes I) U_i^* \psi.$$

Sea k en \mathbb{N} , supongase que

$$(\psi^* U_i(A_{G_i} \otimes I) U_i^* \psi)^k = \psi^* U_i((A_{G_i})^k \otimes I) U_i^* \psi,$$

entonces:

$$\begin{aligned} (\psi^* U_i(A_{G_i} \otimes I) U_i^* \psi)^{k+1} &= (\psi^* U_i(A_{G_i} \otimes I) U_i^* \psi)^k (\psi^* U_i(A_{G_i} \otimes I) U_i^* \psi) \\ &= \psi^* U_i((A_{G_i})^k \otimes I) U_i^* \psi \psi^* U_i(A_{G_i} \otimes I) U_i^* \psi = \psi^* U_i((A_{G_i})^{k+1} \otimes I) U_i^* \psi. \end{aligned}$$

De lo cual

$$\begin{aligned} \langle (A^{(1)})^k(\delta_e), \delta_e \rangle &= \langle (\psi^* \lambda_i(A_{G_i}) \psi)^k(\delta_e), \delta_e \rangle = \langle \psi^* U_i(A_{G_i} \otimes I)^k U_i^* \psi(\delta_e), \psi(\delta_e) \rangle \\ &= \langle U_i(A_{G_i} \otimes I)^k U_i^* \psi(\delta_e), \psi(\delta_e) \rangle = \langle U_i(A_{G_i} \otimes I)^k U_i^* \psi(\delta_e), (\delta_e) \rangle. \end{aligned}$$

Es importante notar que $\psi(\delta_e) = \xi$, donde ξ es el vector distinguido del espacio $\ell_2(V(G_1)) * \ell_2(V(G_2))$.

Entonces:

$$\begin{aligned} \langle U_i((A_{G_i})^k \otimes I) U_i^* \psi(\delta_e), \delta_e \rangle &= \langle ((A_{G_i})^k \otimes I) U_i^*(\xi), U_i^* \xi \rangle = \langle ((A_{G_i})^k \otimes I)(\xi_i \otimes \xi), \xi_i \otimes \xi \rangle \\ &= \langle ((A_{G_i})^k \otimes I)(\xi_i \otimes \xi), \xi_i \otimes \xi \rangle = \langle ((A_{G_i})^k(\xi_i) \otimes \xi), \xi_i \otimes \xi \rangle = \langle (A_{G_i})^k(\xi_i), \xi_i \rangle \langle \xi, \xi \rangle \\ &= \langle (A_{G_i})^k(\xi_i), \xi_i \rangle. \end{aligned}$$

Con lo que (i) queda demostrado.

Para (ii), si para i en $\{1, 2\}$, \mathcal{A}_i , es el álgebra C^* generada por $\{A^{(i)}, I\}$, se tiene que \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 son subálgebras C^* con uno de $\mathcal{B}(\ell_2(V(G)))$.

3. Productos de Gráficas

También, se define φ , donde para cualquier T en $\mathcal{B}(\ell_2(V(G)))$, se tiene que:

$$\varphi(T) = \langle T(\delta_e), \delta_e \rangle.$$

Dada una sucesión de índices $i_1 \neq \dots \neq i_m$, con i_j en $\{1, 2\}$ y a_j en \mathcal{A}_{i_j} , se tiene que:

$$\varphi(a_1 \cdots a_m) = \langle a_1 \cdots a_m(\delta_e), \delta_e \rangle$$

Pero, $a_j = \psi^* \hat{a}_j \psi$, con ψ el isomorfismo entre $\ell_2(V(G_1)) * \ell_2(V(G_2))$ y $\ell_2(V(G))$, con \hat{a}_j en $\lambda_j(\hat{\mathcal{A}}_{i_j})$, donde $\hat{\mathcal{A}}_{i_j}$ es el álgebra generada por $\{A_{G_{i_j}}, I\}$. Luego:

$$\langle a_1 \cdots a_m(\delta_e), \delta_e \rangle = \langle \psi^* \hat{a}_1 \cdots \hat{a}_m \psi(\delta_e), \delta_e \rangle = \langle \hat{a}_1 \cdots \hat{a}_m(\xi), \xi \rangle$$

Pero por la proposición 3.7.2.2

$$\langle \hat{a}_1 \cdots \hat{a}_m(\xi), \xi \rangle = 0.$$

Por lo cual, las álgebras C^* generadas por $\{A^1, I\}$ y $\{A^2, I\}$ son libres con respecto a φ . \square

Algunas Aplicaciones

Halmos dijo una vez en su artículo “*Applied mathematics is bad mathematics*” lo siguiente:

“La afirmación más profunda acerca de la relación entre las matemáticas puras y aplicadas que necesita examinarse es que es simbiótica, en el sentido de que ninguna puede sobrevivir sin la otra. No sólo, como universalmente se admite, necesita la aplicada a la pura, pero, a fin de evitar volverse estéril, sin significado y muerta, la pura necesita la revitalización y el contacto con la realidad que sólo la aplicada puede proveer”. [17]

Es entonces el momento de mencionar algunas de las muchas aplicaciones de algunos de los temas abordados en este trabajo:

Una aplicación dentro de la misma teoría de gráficas consiste en calcular el número de caminos de longitud k que empiezan y terminan en un vértice de una de las gráficas producto con raíz e , de dos gráficas con raíz (G_1, e_1) y (G_2, e_2) . Se tiene que el número de caminos está dado por $\langle A_G^k \delta_e, \delta_e \rangle$, como el operador de adyacencia de las gráficas producto admiten la descomposición $A_G = A^{(1)} + A^{(2)}$.

Estos dos operadores varían en cada gráfica y para ψ como en 3.3.1.1 se tiene que:

$$\langle A_G^k(\delta_e), \delta_e \rangle = \langle (A^{(1)} + A^{(2)})^k(\delta_e), \delta_e \rangle = \psi((A^{(1)} + A^{(2)})^k) = \sum_{w, |w|=k} \psi(w),$$

donde w es una palabra, formada con combinaciones de composiciones de los operadores $A^{(1)}$ y $A^{(2)}$ de longitud k . Es importante enfatizar que $\psi(w)$ puede

calcularse al saber el tipo de producto y por tanto el tipo de independencia asociada.

Por ejemplo, si $G = G_1 * G_2$, para $k = 2$, se tiene que las palabras de longitud 2 son $(A^{(1)})^2$, $A^{(1)}A^{(2)}$, $A^{(2)}A^{(1)}$ y $(A^{(2)})^2$.

Por lo cual :

$$\sum_{w, |w|=k} \psi(w) = \psi((A^{(1)})^2) + \psi(A^{(1)}A^{(2)}) + \psi(A^{(2)}A^{(1)}) + \psi((A^{(2)})^2),$$

como G_1 y G_2 eran gráficas simples, y por la libertad de los operadores con respecto a ψ , se tiene que el número de caminos esta dado por :

$$\psi((A^{(1)})^2) + \psi((A^{(2)})^2),$$

que no es más que la suma de los caminos de longitud dos de las gráficas factor.

Ahora se mencionarán algunas aplicaciones conocidas y enfocadas a otras ciencias, acompañadas de una referencia para que el lector interesado pueda indagar al respecto, cabe aclarar que no son las únicas existentes, sino sólo un pequeño atisbo de ellas.

Los siguientes ejemplos se encuentran detallados en [12]:

Dentro de la química, la teoría espectral de gráficas resulta bastante útil: En particular, se emplea en la teoría de Hückel, la relación consiste en la asociación de gráficas a la estructura molecular de ciertos hidrocarburos y la aproximación de ciertos valores de energía de electrones en su estructura, mediante el espectro de dichas gráficas, que en algunos casos puede incluso indicar la inestabilidad química de una molécula.

En física, puede utilizarse para estudiar las propiedades termodinámicas de moléculas diatómicas absorbidas en la superficie de un cristal, arreglados en una configuración determinada o para estudiar la vibración de una membrana, siendo la teoría espectral un apoyo para resolver algunas ecuaciones diferenciales parciales.

Otro libro recomendado para aquellos interesados en aplicaciones es [25], ya que además de profundizar en otros temas, aborda la relación entre la probabilidad cuántica, las gráficas y los tipos de independencia mencionados en las secciones 3.5 y 3.6.

Algunas Aplicaciones

Respecto al condensado de Bose-Einstein hay una relación entre el producto peine, la independencia monótona y este, puede consultarse más al respecto en [2].

Por último, una aplicación a la biología es aquella abordada por [10], en donde las propiedades de ciertos tipos de gráficas y sus espectros permiten analizar la estructura de proteínas tridimensionales.

Apéndices

Apéndice A

Álgebras de Banach

Para este apéndice y para el lector interesado en este tema, una referencia es [14].

Definición A.1: Álgebra Se dice que un espacio vectorial A sobre \mathbb{C} es un **álgebra** si además posee una operación binaria, que se denomina multiplicación y se denota con yuxtaposición, tal que para cualesquiera x, y, z en A , a en \mathbb{C} , cumple:

- $x(yz) = (xy)z$
- $x(y + z) = xy + xz$; $(y + z)x = yx + zx$
- $a(xy) = x(ay)$

Se dice que A es un álgebra conmutativa si además

- $xy = yx$

Por otro lado se le conoce como álgebra con identidad (o unidad) si A es un álgebra y existe un elemento en A , denotado 1 , tal que para todo x en A se cumple:

- $1x = x1 = x$

Definición A.2: Álgebras normadas Se dice que el espacio vectorial normado $(A, \|\cdot\|)$ sobre \mathbb{C} es un **álgebra normada** si el espacio vectorial normado A es un álgebra y para cualesquiera x, y en A sucede que $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$.

Definición A.3: Álgebras de Banach Decimos que un álgebra normada A es un **álgebra de Banach** si el espacio vectorial normado $(A, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach.

De los siguientes resultados, sólo se presentaran las pruebas más ilustrativas. El lector interesado en profundizar en el tema de álgebras de Banach, puede consultar [13] de la bibliografía.

Proposición A.4: Si f pertenece al álgebra de Banach B y $\|1 - f\| < 1$, entonces f es invertible.

Demostración: Considerando $\eta = \|1 - f\| < 1$, se tiene que para todo $N \geq M$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\| \sum_{n=0}^N (1-f)^n - \sum_{n=0}^M (1-f)^n \right\| \\ &= \left\| \sum_{n=M+1}^N (1-f)^n \right\| \leq \sum_{n=M+1}^N \|(1-f)^n\| = \sum_{n=M+1}^N \eta^n. \end{aligned}$$

Pero por ser una suma geométrica y ya que $\eta = \|1 - f\| < 1$, se tiene:

$$\sum_{n=M+1}^N \eta^n = \frac{\eta^{M+1} - \eta^{N+1}}{1 - \eta} \leq \frac{\eta^{M+1}}{1 - \eta}.$$

De lo cual se concluye que la sucesión de sumas parciales $\{\sum_{n=0}^N (1-f)^n\}_{N=0}^{\infty}$ es de Cauchy. Entonces $\sum_{n=0}^{\infty} (1-f)^n$ es convergente en B .

Se define $g = \sum_{n=0}^{\infty} (1-f)^n$.

Es importante notar que:

$$fg = [1 - (1-f)] \sum_{n=0}^{\infty} (1-f)^n,$$

por continuidad esto se convierte en

$$\lim_{N \rightarrow \infty} [1 - (1-f)] \sum_{n=0}^N (1-f)^n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N [1 - (1-f)](1-f)^n,$$

pero esta es una suma telescópica por lo cual es igual a:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N (1-f)^n - (1-f)^{N+1} = \lim_{N \rightarrow \infty} (1-f)^0 - (1-f)^{N+1} = \lim_{N \rightarrow \infty} 1 - (1-f)^{N+1}.$$

Como B es álgebra de Banach

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|(1-f)^{N+1}\| \leq \|(1-f)\|^{N+1} \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \eta^{N+1},$$

A. Álgebras de Banach

dado que $\eta < 1$ entonces

$$\|(1 - f)^{N+1}\| \longrightarrow 0.$$

Se tiene entonces por la continuidad de la norma que

$$(1 - f)^{N+1} \longrightarrow 0,$$

de lo cual

$$\lim_{N \rightarrow \infty} 1 - (1 - f)^{N+1} = 1.$$

Lo anterior implica que $gf = 1$ por lo cual, se concluye que f es invertible y $f^{-1} = g$. \square

Definición A.5: Dada B un álgebra de Banach, se denotará como \mathcal{g} a la colección de elementos invertibles en B .

Proposición A.6: Si B un álgebra de Banach, el conjunto \mathcal{g} es abierto.

Demostración: Si f está en \mathcal{g} , g en B y $\|f - g\| < \frac{1}{\|f^{-1}\|}$ entonces

$$1 > \|f^{-1}\| \|f - g\| \geq \|1 - f^{-1}g\|.$$

De lo cual, se concluye que $f^{-1}g$ está en \mathcal{g} . Por lo que $g = (f(f^{-1}g))$ pertenece a \mathcal{g} .

Luego \mathcal{g} contiene a la bola abierta de radio $\frac{1}{\|f^{-1}\|}$ con centro en el elemento f .
 \square

Definición A.7: Espectro y radio espectral Dada B un álgebra de Banach y f un elemento de B se define el **espectro de f** como el conjunto:

$$\sigma(f) = \{\lambda \in \mathbb{C} : f - \lambda \text{ no es invertible en } B\}.$$

Más aún, se define el radio espectral de f como $r_B(f) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(f)\}$.

División del espectro El espectro de un operador T se divide en tres partes:

- **Espectro puntual.** Consiste en los eigenvalores de T y se denota $\sigma_p(T)$.
- **Espectro continuo.** Compuesto de escalares λ , que no son eigenvalores de T , pero hacen que el rango de $T - \lambda$ sea un subconjunto denso y propio del espacio.

-
- **Espectro residual.** Consiste en todos los demás escalares que forman parte del espectro, pero no cumplen los requisitos para ser parte del espectro puntual o continuo.

Proposición A.8: Si B es un álgebra de Banach y f un elemento de B , entonces $\sigma(f)$ es compacto y $r_B(f) \leq \|f\|$.

Demostración: Se define $\phi : \mathbb{C} \rightarrow B$, como $\phi(\lambda) = f - \lambda$, claramente ϕ es continua pues:

$$\|\phi(\lambda_1) - \phi(\lambda_2)\| = \|f - \lambda_1 - f + \lambda_2\| = \|\lambda_2 - \lambda_1\| = |\lambda_2 - \lambda_1| \|\mathbf{1}\| = |\lambda_2 - \lambda_1|.$$

Además $\rho(f) = \phi^{-1}(\mathcal{g})$ es abierto ya que \mathcal{g} es abierto. Como $\sigma(f) = \mathbb{C} \setminus \rho(f)$ entonces $\sigma(f)$ es compacto.

Si $|\lambda| > \|f\|$, entonces

$$1 > \frac{\|f\|}{\lambda} = \left\| \frac{f}{\lambda} \right\| = \left\| 1 - \left(1 - \frac{f}{\lambda} \right) \right\|,$$

luego por la proposición A.6, $1 - \frac{f}{\lambda}$ es invertible. De lo que se infiere que $f - \lambda$ es invertible. Por lo cual, λ no pertenece a $\sigma(f)$. Por lo tanto, $r_B(f) \leq \|f\|$. \square

Definición A.9: Álgebra* y Álgebra C* Dada A un álgebra de Banach, decimos que A es un **álgebra*** si existe una función sobre A tal que envía a T a T^* , llamada involución que cumple:

- $T^{**} = T$ para T en A .
- Dados S, T en A , $(ST)^* = T^*S^*$

Si además cumple :

- Dados S, T en A, α, β en \mathbb{C} se tiene que $(\alpha S + \beta T)^* = \bar{\alpha}S^* + \bar{\beta}T^*$
- Dado T en A , $\|T^*T\| = \|T\|^2$

se dice que A es un álgebra C^* .

Definición A.10: Transformada de Gelfand Dada un álgebra de Banach B , si el conjunto de las funcionales multiplicativas que toman valores en B es distinto del vacío, se define a la **transformada de Gelfand** como la función $\Gamma : B \rightarrow C(M)$ tal que dada φ en M , $\Gamma(f)(\varphi) = \varphi(f)$. Donde $C(M)$ denota a las funciones continuas de M a \mathbb{C} .

A. Álgebras de Banach

Teorema A.11: Teorema espectral

Si H es un espacio de Hilbert y T es un operador normal sobre H , entonces el álgebra C^* generada por T es conmutativo. Más aún, el espacio de los ideales máximos de dicha álgebra es homeomorfo a $\sigma(T)$, y existe un isomorfismo isométrico de esa álgebra a $C(\sigma(T))$.

Definición A.12: Álgebra generada Dado un espacio de Banach B y un subconjunto R , se llamará **álgebra generada por R** al álgebra de Banach, más pequeña en el sentido de la contención, que contenga a R .

Definición A.13: Álgebras- $*$ y C^* generadas Dado un espacio de Banach B y un subconjunto R , se llamará **álgebra- $*$ generada por R** a el álgebra- $*$, más pequeña con respecto la contención, que contenga a R . Y **álgebra C^* generada por R** a el álgebra C^* más pequeña, que contenga a R .

Nota: Aquí, se trabajará principalmente con operadores de $\ell_2(V)$ a $\ell_2(V)$, con V un conjunto discreto, este espacio no es un álgebra de Banach, pero dado un operador allí podemos considerar su álgebra generada y trabajar en ella, por ello serán válidos en nuestro contexto los resultados de este apéndice.

Apéndice B

Espacios de Hilbert

A lo largo de los capítulos anteriores, se han utilizado notaciones, resultados y teoremas desarrollados para espacios de Hilbert. En este segundo apéndice se abordan algunas nociones y teoremas básicos y algunas particularidades de los espacios de Hilbert mencionados en el presente trabajo.

Los espacios de Hilbert son un tipo distinguido de espacios de Banach, pues la norma que poseen es heredada de un producto interior. La existencia de dicho producto permite introducir la noción de ortogonalidad, que arroja resultados tan sorprendentes y útiles como el Teorema de Representación de Riesz. Una de las razones por la que estos espacios son tan importante es porque preservan nociones “geométricas” del espacio euclidiano en el que se ha hecho costumbre trabajar por sus múltiples aplicaciones.

Podemos formalizar la idea intuitiva anterior en la siguiente definición:

Definición B.1: Un **espacio de Hilbert** H es un espacio vectorial que posee un producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ y que además es completo con la norma inducida por ese producto interior.

Un breve recordatorio de la definición de producto interior y norma:

Definición B.2: Dado un espacio vectorial W **producto interior** es una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : W \times W \rightarrow \mathbb{C}$ que satisface las siguientes condiciones:

Dados u, v y w en W y λ en \mathbb{C}

i) $\langle \lambda u + v, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$

ii) $\langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle}$

iii) $\langle u, u \rangle > 0$ para toda $u \neq \bar{0}$ en W .

Definición B.3: Dado un espacio vectorial W , una **norma** es una función $\|\cdot\| : W \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple las siguientes propiedades:

Dados u y v en W y λ en \mathbb{C}

i) $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$

ii) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

iii) $\|u\| \geq 0$ para toda u en W y $\|u\| = 0$ si y sólo si $u = \bar{0}$

Observación: Cuando un espacio vectorial posee un producto escalar, se define la norma inducida por dicho producto como $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$. Dadas las propiedades del producto interior, es inmediata la observación de que así definida es en efecto una norma.

Proposición B.4: Dado el espacio $\ell_2(\mathbb{N})$, cuyos elementos son sucesiones $x = \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tales que x_k pertenece a \mathbb{R} para cada k y la serie $\sum_{k \in \mathbb{N}} |x_k|^2$ converge, es un espacio de Hilbert con el producto interior $\langle x, y \rangle = \sum_{k \in \mathbb{N}} x_k y_k$, donde x y y son elementos de $\ell_2(\mathbb{N})$.

Demostración: El primer paso es probar que así definido satisface las condiciones para ser un producto interior, sean pues $x = \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, $y = \{y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ y $z = \{z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ en ℓ_2 , λ en \mathbb{C} . En primer lugar, consideremos:

$$\begin{aligned} \langle \lambda x + z, y \rangle &= \sum_{k \in \mathbb{N}} (\lambda x_k + z_k) y_k = \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda x_k y_k + \sum_{k \in \mathbb{N}} z_k y_k = \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda x_k y_k + \sum_{k \in \mathbb{N}} z_k y_k \\ &= \lambda \sum_{k \in \mathbb{N}} x_k y_k + \sum_{k \in \mathbb{N}} z_k y_k = \lambda \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle. \end{aligned}$$

También: $\langle x, y \rangle = \sum_{k \in \mathbb{N}} x_k y_k$.

Pero para toda k en \mathbb{N} x_k y y_k son números reales, luego:

$\sum_{k \in \mathbb{N}} y_k x_k = \langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$ dado que la serie es una suma de reales.

Por último:

$$\langle x, x \rangle = \sum_{k \in \mathbb{N}} x_k x_k = \sum_{k \in \mathbb{N}} |x_k|^2 \geq \sum_{k \in \mathbb{N}} 0 = 0,$$

B. Espacios de Hilbert

pues para toda k en \mathbb{N} , $|x_k|^2 \geq 0$.

Por lo que así definido $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interior, por la observación, se tiene además que $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ es una norma.

Falta demostrar que con esa norma el espacio $\ell_2(\mathbb{N})$ es completo.

Sea $\{w^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\ell_2(\mathbb{N})$, por definición se tiene que dado $\epsilon > 0$ existe m en \mathbb{N} tal que $\|w_m - w_n\| < \epsilon$ para toda $n \geq m$, es decir $\epsilon^2 > \sum_{k \in \mathbb{N}} |w_k^m - w_k^n|^2$.

Es importante observar que dada k fija en \mathbb{N} , la sucesión w_k^n con n en \mathbb{N} es de Cauchy, pues si la suma total es menor que ϵ , en particular cada sumando con índice $n \geq m$, lo es. Pero w_k^n es una sucesión de Cauchy en los reales, que es un espacio vectorial completo, por lo tanto converge a un \bar{v}_k , en particular dada $\epsilon > 0$ existe m en \mathbb{N} tal que si $n \geq m$ entonces $|v_k - w_k^n| < \frac{\epsilon}{k}$. Se define una nueva sucesión $\bar{v} = \{\bar{v}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Primero se probará que \bar{v} pertenece a $\ell_2(\mathbb{N})$.

Sea M en \mathbb{N} arbitraria, si $n, j \geq M$

$$\sum_{k=1}^{k=M} |w_k^n - w_k^j|^2 < \sum_{k=1}^{\infty} |w_k^n - w_k^j|^2 < \epsilon^2,$$

también:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{k=M} |\bar{v}_k - w_k^j|^2 &= \sum_{k=1}^{k=M} \left| \lim_{n \rightarrow \infty} w_k^n - w_k^j \right|^2 = \sum_{k=1}^{k=M} \left| \lim_{n \rightarrow \infty} (w_k^n - w_k^j) \right|^2 \\ &= \sum_{k=1}^{k=M} \lim_{n \rightarrow \infty} |(w_k^n - w_k^j)|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{k=M} |(w_k^n - w_k^j)|^2 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon^2 = \epsilon^2. \end{aligned}$$

Ahora:

$$\left(\sum_{k=1}^{k=M} |\bar{v}_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=1}^{k=M} |\bar{v}_k - w_k^m + w_k^m|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

por la desigualdad de Minkowski esto es menor o igual que:

$$\left(\sum_{k=1}^{k=M} |\bar{v}_k - w_k^m|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{k=M} |w_k^m|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \epsilon + \|w^m\|_2 < \infty.$$

Esto se cumple para cualesquiera M en \mathbb{N} , por lo tanto:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\bar{v}_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{k=M} |\bar{v}_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

por lo visto anteriormente:

$$\|\bar{v} - w^n\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\bar{v}_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \lim_{M \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^{k=M} |\bar{v}_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \epsilon, \text{ siempre que } n \geq m.$$

De lo cual, $\{w^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a \bar{v} , por todo lo anterior ℓ_2 es un espacio de Banach. \square

Se recordará brevemente el concepto de suma directa:

Definición B.5: Dado un espacio vectorial W y n subespacios vectoriales W_1, W_2, \dots, W_n , con n un natural, se dice que W es **suma directa** de W_1, \dots, W_n si cada elemento w en W puede escribirse como $w = w_1 + w_2 + \dots + w_n$ con w_i en W_i para cada i y $W_i \cap W_j = \emptyset$ si $i \neq j$. En este caso se escribe: $W = \bigoplus_{i=1}^n W_i$.

Observación: Así como es posible indexar estas sucesiones sobre los naturales para obtener a $\ell_2(\mathbb{N})$, también dada una gráfica G cuyo conjunto de vértices sea a lo más contable, se puede trabajar en el espacio $\ell_2(V(G))$. En el caso de que esta sea finita de orden n , indexar sobre los vértices sería equivalente a indexar sobre los primeros n naturales y considerar todas las demás entradas cero; en caso de que ser G sea infinita numerable, por la biyección asociada a la numerabilidad del conjunto de vértices, sería equivalente a indexar sobre los naturales.

Proposición B.6: Si V es el conjunto de vértices de G , V_i es el conjunto de vértices de la componente conexa G_i de G y además se tiene que $G = \sqcup_{i=1}^n G_i$ entonces $\ell_2(V) = \bigoplus_{i=1}^n \ell_2(V_i)$.

Demostración: Sea $\bar{x} = (x_{v_1}, x_{v_2}, \dots, x_{v_j}, \dots)$ en $\ell_2(V)$, entonces dado que $G = \sqcup_{i=1}^n G_i$ para todo v_j en V existe i natural tal que v_j pertenece a V_i , se consideran todos los índices que pertenecen a cada uno de los V_i , se considera a esas entradas las entradas del vector \bar{x}_i (en el lugar correspondiente), las demás entradas de \bar{x}_i serán cero. Luego \bar{x} puede expresarse como una suma de elementos en $\ell_2(V_i)$. Además, la unión de los G_i es ajena, por lo que los conjuntos V_i son ajenos. De allí que el único vector en todos los $\ell_2(V_i)$ sea el vector $\bar{0}$. \square

B. Espacios de Hilbert

Proposición B.7: Con la misma notación que en la proposición anterior:

Si $A : \ell_2(V) \rightarrow \ell_2(V)$, el operador de adyacencia de G es acotado, entonces $\ell_2(V_i)$ es A -invariante.

Demostración: El operador de adyacencia aplicado a un vector x estaba definido como sigue:

$$y_u = \sum_{v \in V} a_{u,v} x_v, \quad u \in V$$

Dado u en V_i , $a_{u,v}$ es distinto de cero sólo cuando v pertenece también a V_i , por lo cual si el vector x estaba en $\ell_2(V_i)$, el vector resultante pertenecerá a $\ell_2(V_i)$, de lo cual este es A invariante. \square

Proposición B.8: Continuando con la misma notación que en la proposición B.6, si $P_i : \ell_2(V(G)) \rightarrow \ell_2(V_i)$, es la proyección ortogonal entonces dado $A = A(G)$ el operador de adyacencia de una gráfica localmente finita entonces $AP = PA$.

Demostración: Se tiene que $\ell_2(V_i)$ es A invariante, por lo que dados \bar{x} en $\ell_2(V)$ y \bar{x}_i su proyección a $\ell_2(V_i)$, $AP_i(\bar{x}) = A(\bar{x}_i) = P_i A(\bar{x}_i)$. Por lo que la proyección conmuta con el operador de adyacencia. \square

Productos Tensoriales de Espacios de Hilbert

El primer elemento en este apéndice es la propiedad universal del producto tensorial para espacios vectoriales, para un trato más detallado puede consultarse [26].

C.1 Propiedad universal del producto tensorial Dados V y W espacios vectoriales sobre un campo K se define un producto tensorial de V y W como la pareja (M, τ) donde M es un espacio vectorial sobre K y τ es un mapeo bilineal de $V \times W$ a M , donde dicho mapeo posee la siguiente propiedad universal:

Siempre que f sea un mapeo bilineal de $V \times W$ a un espacio vectorial Y sobre K , entonces existe un único mapeo lineal F de M a Y tal que el diagrama mostrado a continuación conmuta.

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{\tau} & M \\ & \searrow f & \downarrow F \\ & & Y \end{array}$$

Esa propiedad debe tenerse en mente mientras se trabaje en espacios vectoriales. En este caso se está trabajando en un espacio de Hilbert. En este tipo de espacios, hay más de una manera de construir el producto tensorial, una muy interesante es la que aparece en [36]. El enfoque que se manejará en este apéndice es más bien similar al de Berberian en [3]. Sin embargo, por su extensión,

está construcción se abordará solamente de manera superficial.

Definición C.2: Dados dos espacios de Hilbert H_1 y H_2 con $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ sus respectivos productos, decimos que un mapeo bilineal $T : H_1 \times H_2 \rightarrow M$ es un **producto tensorial** si $\overline{\langle T(H_1 \times H_2) \rangle} = M$ y dados x_1, x_2 en H_1 y y_1, y_2 en H_2 se tiene que $\langle T(x_1, y_1), T(x_2, y_2) \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle_1 \langle y_1, y_2 \rangle_2$. Denotaremos a ese producto tensorial como \otimes , es decir $T(x_1, y_1)$ se denotará por $x_1 \otimes y_1$.

Ahora consideraremos el siguiente espacio:

$$H_1 \otimes H_2 := \left\{ \sum_{i=1}^n h_i \otimes k_i \mid n \in \mathbb{N}, h_i \in H_1, k_i \in H_2 \right\}$$

De esta manera, dados $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i h_i \otimes k_i$, $y = \sum_{j=1}^m \lambda_j h'_j \otimes k'_j$ en $H_1 \otimes H_2$, con h_l en H_1 y k_l en H_2 para toda l tal que $1 \leq l \leq \max\{n, m\}$. Definimos:

$$\langle x, y \rangle_{H_1 \otimes H_2} := \sum_i \sum_j \lambda_i \bar{\lambda}_j \langle h_i, h'_j \rangle \langle k_i, k'_j \rangle.$$

Proposición C.3: $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_1 \otimes H_2}$ así definido es un producto interior.

Demostración: Sean pues x, y y z en $H_1 \otimes H_2$. Luego, x puede escribirse como $\sum_{i=1}^n \lambda_i h_i \otimes k_i$, también y es la $\sum_{j=1}^n \lambda_j h'_j \otimes k'_j$ y z se escribe como $\sum_{s=1}^p \lambda_s h''_s \otimes k''_s$ sin pérdida de generalidad sea $n > m > p$, así h_l en H_1 y k_l en H_2 para toda l natural distinto de cero y menor que n .

Primeramente se tiene que:

$$\langle \mu x + z, y \rangle_{H_1 \otimes H_2} = \langle \mu \sum_{i=1}^n \lambda_i h_i \otimes k_i + \sum_{j=1}^n \lambda_j h'_j \otimes k'_j, \sum_{s=1}^p \lambda_s h''_s \otimes k''_s \rangle.$$

Ahora se considerará para $1 \leq l \leq n$, $h_l''' = h_l$ y para cuando $n+1 \leq l \leq n+m$ $h_l''' = h_l - n$, también para $1 \leq l \leq n$, se tendrá $k_l''' = k_l$ y si $n+1 \leq l \leq n+m$, $k_l''' = k_l - n$. Se define para $1 \leq l \leq n$ $\lambda'(l) = \mu \lambda_l$ y para $n+1 \leq l \leq \lambda'(l) = \lambda_j$. Así, la suma anterior se transformará en :

$$\left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i h_i''' \otimes k_i''', \sum_{s=1}^p \lambda_s h_s'' \otimes k_s'' \right\rangle.$$

C. Productos Tensoriales de Espacios de Hilbert

Por como se definió el producto interior, esto será:

$$\sum_l \sum_s \lambda_l \langle h'''l, h''_s \rangle_1 \langle k_l, k''_s \rangle_2,$$

dada la definición de λ_l , $h'''l$ y $k''l$ se tiene:

$$\begin{aligned} &= \mu \sum_i \sum_s \lambda_i \langle h_i, h''_s \rangle_1 \langle k_i, k''_s \rangle_2 + \sum_j \sum_s \lambda_j \langle h_j, h''_s \rangle_1 \langle k_j, k''_s \rangle_2 \\ &= \mu \langle x, z \rangle_{H_1 \otimes H_2} + \langle y, z \rangle_{H_1 \otimes H_2}. \end{aligned}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle_{H_1 \otimes H_2} &= \sum_i \sum_j \lambda_i \bar{\lambda}_j \langle h_i, h'_j \rangle_1 \langle k_i, k'_j \rangle_2 \\ &= \sum_i \sum_j \lambda_i \bar{\lambda}_j \overline{\langle h'_j, h_i \rangle_1} \overline{\langle k'_j, k_i \rangle_2} = \sum_i \sum_j \overline{\lambda_i \bar{\lambda}_j \langle h'_j, h_i \rangle_1 \langle k'_j, k_i \rangle_2} \\ &= \overline{\sum_i \sum_j \lambda_j \bar{\lambda}_i \langle h_j, h_i \rangle_1 \langle k_j, k_i \rangle_2} = \overline{\langle y, x \rangle_{H_1 \otimes H_2}}. \end{aligned}$$

Por último: $\langle x, x \rangle_{H_1 \otimes H_2} = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \langle h_i, h_i \rangle_1 \langle k_i, k_i \rangle_1 \geq 0$, siendo cero solamente si h_i y k_i son iguales a cero para toda i entre 1 y n , es decir si x es cero. Con eso se concluye la prueba de la proposición 1. \square

Lo cual también prueba que $H_1 \otimes H_2$ es un espacio con producto interior, por ello, admite una completación que es un espacio de Hilbert. Denotaremos por $H_1 \otimes H_2$ a su completación y por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_1 \otimes H_2}$ al producto interior de este, que resulta una extensión continua del producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_1 \otimes H_2}$. Para una prueba detallada de esta última afirmación, puede consultarse [3].

Ya construido el producto tensorial de espacios de Hilbert; lo que se abordará a continuación es el producto tensorial de operadores en espacios de Hilbert.

Proposición C.4: Dados dos espacios de Hilbert H_1, H_2 , un operador acotado T que actúa en el espacio de Hilbert H_1 y un operador S con dominio en el espacio de Hilbert H_2 . Se tiene que existe un unico $T \otimes S : H_1 \otimes H_2 \rightarrow H_1 \otimes H_2$ acotado, tal que dados h en H_1 y k en H_2 , $T \otimes S(h \otimes k) = T(h) \otimes S(k)$.

Demostración: Se define $T \otimes S$, primero para los elementos de $H_1 \otimes H_2$, dado x allí, entonces $x = \sum_{i=1}^n c_i f_i \otimes g_i$ con c_i en \mathbb{C} , f_i en H_1 y g_i en H_2 como

$$T \otimes S \left(\sum_{i=1}^n c_i f_i \otimes g_i \right) = \sum_{i=1}^n c_i T(f_i) \otimes S(g_i).$$

Así definida, se verá que esta transformación es lineal,

Sean x, y en $H_1 \otimes H_2$ y λ en \mathbb{C} , primeramente se observa que haciendo $\mu_k = ck$, $f''_k = fk$ y $g''_k = gk$ si $1 \leq k \leq n$ y $\mu_k = \lambda c'_j$, $f''_k = f'n - k$ y $g''_k = g'n - k$ si $n+1 \leq k \leq n+m$, entonces:

$$\sum_{i=1}^n c_i f_i \otimes g_i + \lambda \sum_{j=1}^m c'_j f'_j \otimes g'_j = \sum_{k=1}^{n+m} \mu_k f''_k \otimes g''_k,$$

donde además para toda k en $\{1, \dots, n+m\}$, f''_k está en H_1 y g''_k pertenece a H_2 .

Por ello, se tiene que

$$T \otimes S \left(\sum_{i=1}^n c_i f_i \otimes g_i + \lambda \sum_{j=1}^m c'_j f'_j \otimes g'_j \right) = T \otimes S \left(\sum_{k=1}^{n+m} \mu_k f''_k \otimes g''_k \right),$$

por como está definida $T \otimes S$, esto último se transforma en:

$$\sum_{k=1}^{n+m} \mu_k T(f''_k) \otimes S(g''_k).$$

Regresando a los índices iniciales esto es:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n c_i T(f_i) \otimes S(g_i) + \sum_{j=1}^m \lambda c'_j T(f'_j) \otimes S(g'_j) \\ &= \sum_{i=1}^n c_i T(f_i) \otimes S(g_i) + \sum_{j=1}^m \lambda c'_j T(f'_j) \otimes S(g'_j) = (T \otimes S)(x) + \lambda (T \otimes S)(y). \end{aligned}$$

comprobándose así la linealidad.

Ahora se verá que $T \otimes S$ es acotado:

$$\begin{aligned} \|T \otimes S(x)\|^2 &= \left\langle \sum_{i=1}^n c_i T(f_i) \otimes S(g_i), \sum_{i=1}^n c_i T(f_i) \otimes S(g_i) \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n |c_i|^2 \langle T(f_i), T(f_i) \rangle_1 \langle S(g_i), S(g_i) \rangle_2 \leq \sum_{i=1}^n |c_i|^2 \|T\|^2 \langle f_i, f_i \rangle_1 \|S\|^2 \langle g_i, g_i \rangle_2 \\ &= \|T\|^2 \|S\|^2 \sum_{i=1}^n |c_i|^2 \langle f_i, f_i \rangle_1 \langle g_i, g_i \rangle_2 = \|T\|^2 \|S\|^2 \|x\|^2. \end{aligned}$$

De lo que

$$\|T \otimes S\| \leq \|T\| \|S\|.$$

C. Productos Tensoriales de Espacios de Hilbert

Es importante notar que todo se trabajó para $H_1 \otimes H_2$, sin embargo por ser $H_1 \otimes H_2$ la cerradura de este, se extiende de manera única, lineal y continua, a $T \otimes S$ a un operador en $H_1 \otimes H_2$, el cual en un abuso de notación recibirá la misma nomenclatura. Para probar lo que falta, supongasé que hay otro operador $\eta : H_1 \otimes H_2 \rightarrow H_1 \otimes H_2$, que cumple la hipótesis, restringiéndolo a $H_1 \otimes H_2$, se tiene que $\eta(x) = \eta\left(\sum_{i=1}^n c_i f_i \otimes g_i\right) = \sum_{i=1}^n c_i T(f_i) \otimes S(g_i) = T \otimes S\left(\sum_{i=1}^n c_i f_i \otimes g_i\right) = T \otimes S(x)$. Pero $H_1 \otimes H_2$ es un subespacio denso de $H_1 \otimes H_2$. Por lo cual $\eta = T \otimes S$ en $H_1 \otimes H_2$, de lo que se concluye la unicidad. \square

Se enunciarán, sin prueba, algunas propiedades del producto tensorial entre operadores, el lector interesado en su demostración puede consultar [3].

Proposición C.5: Sean $T : H_1 \rightarrow H_1, R : H_1 \rightarrow H_1, S : H_2 \rightarrow H_2, S : H_2 \rightarrow H_2$ operadores lineales acotados y λ en \mathbb{C} Entonces se cumplen:

- $I_{H_1} \otimes I_{H_2} = I_{H_1 \otimes H_2}$
- $(T + R) \otimes S = T \otimes S + R \otimes S$ y $T \otimes (S + U) = T \otimes S + T \otimes U$
- $\lambda T \otimes S = \lambda(T \otimes S) = T \otimes \lambda S$
- $(T \otimes S)(R \otimes U) = TR \otimes US$
- $(T \otimes S)^* = T^* \otimes S^*$
- $\|T \otimes S\| = \|T\| \|S\|$
- $T \otimes S$ es invertible si y sólo si T y S son invertibles, en ese caso se tiene que $(T \otimes S)^{-1} = T^{-1} \otimes S^{-1}$.

Nota: Es posible generalizar el producto tensorial aquí descrito, así como el producto interior definido, con una construcción similar para un producto entre n factores, siendo aún válida también (por inducción) la proposición C.5.

Bibliografía

- [1] Accardi L., Lenczewski R., Salapata R.(2007). Decompositions of the free product of graphs. *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, Vol.10 (No.3), 303-334.
- [2] Accardi L., Lenczewski R., Salapata R. (2004). Monotone Independence, comb graphs and Bose-Einstein condensation. *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, Vol.7(No.3), 419-435.
- [3] Berberian S.K.(2013). *Tensor product of Hilbert Spaces*. Obtenido de <https://www.ma.utexas.edu/mparc/c/14/14-2.pdf>
- [4] Balakrishnan R., Ranganathan K. (2012). *A Textbook of Graph Theory, Primera edición*. Nueva York, Estados Unidos de América : Springer.
- [5] Biggs Norman L., Lloyd E.Keith, Wilson Robin J.(1998). *Graph Theory 1736-1936*. Estados Unidos de América: Oxford University Press.
- [6] Bogachev Vladimir I. (2007). *Measure Theory, Volume I*. Springer. DOI: 10.1007/978-3-540-34514-5.
- [7] Bondy J.A., Murty U.S.R. (1982). *Graph Theory with Applications*. Estados Unidos de América: Elsevier Science Publishing.
- [8] Brouwer Andries E., Haemers Willem H. (2012). *Spectra of Graphs*. Springer. DOI: 10.1007/978-1-4614-1939-6
- [9] Brown A., Percy C. (1966). Spectra of tensor products of operators. *Proc. Amer. Math. Soc.* 17. 162-166.

-
- [10] Brinda K.V., Kannan N., Vishveshwara S. (2002). Protein Structure: Insights from Graph Theory. *Journal of Theoretical and Computational Chemistry*, Vol.1(No.1), 187-211.
- [11] Clapp Mónica A.(2016). *Análisis Matemático*. Ciudad de México, México : Papirhos.
- [12] Cvetkovic Dragos M., Doob M., Sachs H. (1980). *Spectra of Graphs (Theory and Application)* Berlin, Alemania: Academic Press.
- [13] Downson H.R. (1978). *Spectral Theory of Linear Operators*. Norwich, Reino Unido: Academic Press.
- [14] Douglas, Ronald G. (1998). *Banach Algebra Techniques in Operator Theory, 2nd edition*. Nueva York, Estados Unidos de América: Springer-Verlag.
- [15] Dunford Nelson, Schwartz Jacob T. (1967). *Linear Operators, Part II, Spectral Theory, Self Adjoint Operators in Hilbert Space*. Estados Unidos de América: Interscience Publishers.
- [16] Dykema K.J., Nica A., Voiculescu D.V. (2002). *Free Random Variables, A noncommutative probability approach to free products with applications to random matrices, operator algebras and harmonic analysis on free product*. Estados Unidos de América : AMS.
- [17] Ewing J.(2007). Paul Halmos: In his Own Words. *Notices of the American Mathematical Society*, Vol.54(9), 1136-1144.
- [18] Friedberg Stephen H., Insel Arnold J., Spence Lawrence E. (1982) *Algebra Lineal*. México: Publicaciones Cultural.
- [19] Golan Jonathan S. (2007). *The Linear Algebra a Beginning Graduate Student Ought to Know*, segunda edición. Springer. DOI: 10.1007/978-94-007-2636-9
- [20] Grabinsky Guillermo. (2013). *Teoría de la medida* segunda reimpresión. México: UNAM, Facultad de Ciencias.
- [21] Grinstead Charles M., Snell J.L.(2012). *Introduction to Probability*, segunda edición. Estados Unidos de América: AMS.
- [22] Halmos Paul R. (1951). *Introduction to Hilbert space and the theory of spectral multiplicity*, primera edición. Nueva York: Chelsea.
-

BIBLIOGRAFÍA

- [23] Hammack R., Imrich W., Klavzar S. (2011). *Handbook of Product Graphs*, 2a. edición. Estados Unidos de América: CRC Press.
- [24] Harary F. (1955). *The number of linear, directed, rooted and connected graphs*. Obtenido de <http://www.ams.org/journals/tran/1955-078-02/S0002-9947-1955-0068198-2/S0002-9947-1955-0068198-2.pdf>
- [25] Hora A., Obata N. (2007). *Quantum Probability and Spectral Analysis of Graphs*. Springer. DOI: 10.1007/3-540-48863-4
- [26] Knapp Anthony W. (2006). *Basic Algebra: Along with a companion volume Advanced Algebra*. Boston, Estados Unidos de América: Birkäuser Boston.
- [27] Lützen J. (1990). The birth of Spectral Theory- Josheph Liouville's Contributions. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Kyoto, Japan*, 1652-1663.
- [28] Mardiana N., Purwashi I.A., Saputro S.W. (2017). *The metric dimension of comb product graphs*. Obtenido de <http://www.vesnik.math.rs/inpress/mv2016078.pdf>.
- [29] Mohar B., Woess W.(1989). A Survey on Spectra of Infinite Graphs. *Bull. London. Math. Soc.*, Vol. 21. 209-234.
- [30] Mohar Bojan. (1982). The Spectrum of an Infinite Graph. *Linear Algebra Appl.*, Vol.48. 245-256.
- [31] Nica B. (2016). *A Brief introduction to Spectral Graph Theory*. Referencia de arXiv: arXiv:1609.08072
- [32] Nica A., Speicher R. (2006). *Lectures on the combinatorics of free probability*. Estados Unidos de América. Cambridge University Press.
- [33] Rincón L. (2015)*Introducción a la probabilidad*. México: UNAM: Facultad de Ciencias.
- [34] Steen L.A. (1973). Highlights in the History of Spectral Theory. *The American Mathematical Monthly*, Vol.80, 359-381.
- [35] Taylor Angus E., Lay David C. (1980). *Introduction to Functional Analysis*, 2a edición. Florida, Estados Unidos de América: John Wiley.
- [36] Weidmann, Joachim. (1980). *Linear operators in Hilbert spaces*. Springer. DOI: 10.1007/978-1-4612-6027-1.